

2022 年数理社会学^{*1}

石田 淳

aishida@kwansei.ac.jp

^{*1} 2022 年 7 月 21 日版. この講義ノートはクリエイティブ・コモンズ 表示 - 非営利 - 改変禁止 4.0 国際ライセンス (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>) の下に提供されています.

目次

第 1 章	2022 数理社会学イントロダクション	1
1.1	シラバス	1
1.1.1	授業目的	1
1.1.2	到達目標	1
1.1.3	授業時間外の学習（準備学習等について）	1
1.1.4	授業計画	2
1.1.5	授業方法	2
1.1.6	参考文献	3
1.2	数理社会学とはどのような学問か？	4
1.2.1	連字符社会学としての数理社会学	4
1.2.2	社会を「モデル」でみる	4
1.2.3	フォーマル・セオリーとしての数理社会学	5
1.2.4	マイクロ・マクロリンク	6
1.2.5	モデル・スペキュレーション	7
1.2.6	数理モデルと計量モデル【Advanced】	8
第 2 章	囚人のジレンマとゲーム理論	11
2.1	2つのゲーム	11
2.1.1	グーパージャンケン	11
2.1.2	囚人のジレンマ	12
2.2	ゲームとは何か	13
2.3	標準型ゲームの構成要素	14

2.3.1	囚人のジレンマの構成要素	14
2.3.2	利得表	15
2.3.3	標準型ゲームの構成要素の一般的記述【Advanced】	16
2.4	支配戦略	17
2.4.1	支配戦略の組	17
2.4.2	支配される戦略の消去	18
2.5	最適反応戦略	19
2.5.1	両性の戦い	19
2.5.2	最適反応戦略の定義	20
2.6	ナッシュ均衡	21
2.6.1	最適反応戦略の組み合わせ	21
2.6.2	ナッシュ均衡の定義	22
2.6.3	両性の戦いのナッシュ均衡	23
2.6.4	囚人のジレンマのナッシュ均衡	24
2.7	パレート最適	24
2.7.1	パレート最適の定義	25
2.7.2	囚人のジレンマの何がジレンマか?	26
2.8	無限繰り返しゲーム	27
2.8.1	無限繰り返しゲームの定義	27
2.8.2	無限繰り返しゲームにおける戦略	28
2.8.3	無限繰り返しゲームにおける利得	29
2.9	無限繰り返し囚人のジレンマゲームの結果の分析	30
2.9.1	4つの戦略の利得表	31
2.9.2	非協力ナッシュ均衡	32
2.9.3	協力状態が実現する可能性	33
2.10	フォーク定理【Advanced】	34
2.10.1	(トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件	35
2.10.2	(しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる一般的条件	36
2.11	アクセルロッドのトーナメント	36

第 3 章	相対的剥奪と不平等	39
3.1	相対的剥奪	39
3.1.1	相対的剥奪の発見	39
3.1.2	相対的剥奪の概念	41
3.2	Boudon-Kosaka モデル	41
3.2.1	モデルの公理	41
3.2.2	Boudon-Kosaka モデルにおけるナッシュ均衡	43
3.2.3	ナッシュ均衡における剥奪割合	46
3.2.4	Boudon-Kosaka モデル以降	47
3.3	ジニ係数と相対的剥奪	47
3.3.1	ローレンツ曲線	48
3.3.2	ジニ係数	49
3.3.3	ジニ係数の一般的な定義【Advanced】	51
3.3.4	SSM2015 世帯所得のローレンツ曲線とジニ係数	54
3.3.5	相対的剥奪指数	54
3.3.6	経済発展と相対的剥奪	57
第 4 章	階層イメージ・階層帰属意識生成モデル	59
4.1	階層イメージ・階層帰属意識の経験的知見	59
4.1.1	階層構造のマイクロ・マクロリンク	59
4.1.2	階層イメージの経験的知見	60
4.1.3	階層帰属意識の経験的知見	60
4.2	Fararo-Kosaka モデル	63
4.3	具体例による FK モデルの分析	65
4.3.1	2 × 2 客観階層構造	65
4.3.2	2 × 3 客観階層構造	67
4.4	一般的な FK モデルの帰結	68
4.4.1	階層イメージの特性	69
4.4.2	階層帰属意識分布の特性	70
4.5	階層帰属意識分布関数の導出【Advanced】	74

第 5 章	親族構造のモデル	79
5.1	親族構造	79
5.1.1	交換の体系としての社会	79
5.1.2	親族構造	80
5.2	ホワイトのモデル	81
5.3	ホワイトの公理の行列による表現	82
5.3.1	公理 5.1-5.5 による表現規則	82
5.3.2	公理 5.6-5.8 の数学的表現【Advanced】	84
5.4	(第 1) イトコ婚	85
5.4.1	父方平行イトコ婚	85
5.4.2	母方平行イトコ婚	86
5.4.3	母方交差イトコ婚	86
5.4.4	父方交差イトコ婚	87
5.4.5	双系交差イトコ婚の必要条件	88
5.4.6	許容されるイトコ婚の種類による社会の分類	88
5.4.7	交換の 2 つの向き	88
5.5	群としての親族関係【Advanced】	89
5.5.1	親族関係のタイプ	89
5.5.2	親族関係の群論	90
5.6	具体事例の分析	91
5.6.1	カリエラ族	92
5.6.2	タラウ族	93
第 6 章	二国間軍拡競争モデル	95
6.1	戦争モデル (1) 弓矢の戦	95
6.1.1	微分方程式系の定式化	95
6.1.2	微分方程式について	96
6.1.3	微分方程式系の解	97
6.1.4	二軍間の相互作用	98
6.2	戦争のモデル (2) 近代戦	100

	6.2.1	微分方程式モデルの定式化	100
	6.2.2	二軍間の相互作用	102
6.3		二国間軍拡競争モデル	103
	6.3.1	微分方程式系の定式化	103
	6.3.2	定常点	106
	6.3.3	x, y の増減	106
	6.3.4	分析のまとめ	109
第 7 章		感染症と流行のモデル	113
	7.1	Pandemic 2020-202?	113
	7.2	単純感染モデル	114
	7.2.1	具体例	114
	7.2.2	一般化	115
	7.2.3	数値例	116
	7.3	単純感染の微分方程式モデル	118
	7.3.1	微分方程式モデルの定式化	118
	7.3.2	微分方程式を解く【Advanced】	118
	7.3.3	累積感染者数と新規感染者数の予測	120
	7.4	SIR モデル	121
	7.4.1	モデルの仮定	121
	7.4.2	初期挙動の分析【Advanced】	122
	7.4.3	基本再生算数	124
	7.4.4	(S, I) 相平面【Advanced】	125
	7.4.5	閾値定理【Advanced】	129
	7.4.6	流行曲線【Advanced】	131
	7.5	感染のエージェント・ベースド・モデル	132
付録 A			135
	A.1	課題の解答 (一部)	135

第1章

2022 数理社会学イントロダクション

1.1 シラバス

1.1.1 授業目的

数理社会学の最終的な目標は、数学言語によるモデルを分析することで、社会現象のメカニズムを解明することにある。本講義では、いくつかの古典的な種類の数理モデルを紹介し、数理社会学のエッセンスを伝えることを目指す。

1.1.2 到達目標

数理社会学の考え方について理解すること、社会現象について形式的に表現し説明できるようになること、数理モデルの考え方に触れることで論理思考力が鍛えられること。

1.1.3 授業時間外の学習（準備学習等について）

授業を進める上で必要となる数学的知識については、授業内で一から学習していきますので、高度な数学的知識は事前には必要としません。数学に苦手意識を持っている人でも十分にフォロー可能です。必要なのは挑戦心と向学心です。授業では事前に講義ノートを配布したいと思いますので、しっかりと予習・復習して授業に臨むと効果的な学習になるでしょう。

1.1.4 授業計画

*以降の授業計画は実際の進捗状況などによって変更される可能性がある。

	内容	授業日
(1)	1章 イントロダクション	4/14
(2)	2章 囚人のジレンマとゲーム理論 (1)	4/21
(3)	2章 囚人のジレンマとゲーム理論 (2)	4/28
(4)	2章 囚人のジレンマとゲーム理論 (3)	5/12
(5)	3章 相対的剥奪と不平等 (1)	5/19
(6)	3章 相対的剥奪と不平等 (2)	5/26
(7)	4章 階層イメージ・階層帰属意識生成モデル (1)	6/2
(8)	4章 階層イメージ・階層帰属意識生成モデル (2)	6/9
(9)	5章 親族構造のモデル (1)	6/16
(10)	5章 親族構造のモデル (2)	6/23
(11)	6章 二国間軍拡競争モデル (1)	6/30
(12)	6章 二国間軍拡競争モデル (2)	7/7
(13)	7章 感染症と流行のモデル (1)	7/14
(14)	7章 感染症と流行のモデル (2)	7/21

1.1.5 授業方法

- 今のところ対面講義方式を予定している。本講義ノートと参考資料をもとに板書と説明によって授業を進める。
- 各自感染症対策をしっかりと行うこと。とくにマスク着用は必須でありマスクは鼻口を覆う形で適切に着用すること。感染症対策について、講師の指示に従わない人は教室の安全確保のため受講を拒否することがある。
- 講義ノートは事前に OneDrive にアップロードしておく。授業開始前から読み進めてよい。アドバンストな内容であったり、追加的な情報であり授業本体の理解のためには読み飛ばしてよい節には【Advanced】とつけている。また、注も基本的には読み飛ばしてよい。
- 各モデルについて、そのモデルで必要とされる数学的知識から分析結果までを

2-3 回にわたって解説する。授業中の小テストや宿題によって、受講生自らがモデルを「動かす」機会を作る。

- 数理モデルを扱うので当然授業では数学を多用する。ただし基本的には、中学高校レベルの基本的な四則演算と不等式の知識があればフォローできるものと期待する。後半で一部微分積分の知識が必要になる。
- 成績評価方法：平常評価 20%，期末テスト 80%。
- 平常リポートとして「課題」もしくは「小テスト」を LUNA 上で課すことがある。課題内容については、授業中のみ指示し、授業外では一切繰り返さない。
- 課題ファイルはコピペチェッカーにかける。異なる受講者から同一ファイルが提出された場合は、どのような事情であろうと提出した受講者全員を不可とする。
- 他の受講者の受講の妨げとなるような行為は厳禁である。逸脱行為にはゼロトランスで対応する。
- 質疑応答はメール (aishida@kwansei.ac.jp) もしくはオフィスアワー (木曜 4 限，第一教授館本館 103) で行う。

1.1.6 参考文献

小林・木村 (1991) 『考える社会学』 ミネルヴァ書房。

できるだけ数式を使わずに、モデル・スペキュレーションの考え方と具体的な社会的モデルを解説。

土場 (2004) 『社会を〈モデル〉でみる——数理社会学への招待』 勁草書房。

数理社会学の多様なモデルをコンパクトに紹介。

Page (2018) 『多モデル思考』 森北出版。

社会科学の多様なモデルを紹介。

浜田 (2018) 『その問題，数理モデルが解決します』 ベレ出版。

浜田 (2020) 『その問題，やっぱり数理モデルが解決します』 ベレ出版。

2人の登場人物の掛け合いでいくつかのモデルを紹介。

その他の参考文献については、本文中で適宜紹介する。

1.2 数理社会学とはどのような学問か？

課題 1.1. なぜ「数理社会学」を受講しようと考えたか。「数理社会学」という分野にどのようなイメージを持っていたか。受講前の率直な印象と、受講後のイメージの（不）変化について記述しよう。

本節では、数理社会学とはどのような学問なのかを説明する。

1.2.1 連字符社会学としての数理社会学

社会学部の時間割を見てみると、「都市社会学」「環境社会学」「家族社会学」などさまざまな「〇〇社会学」があることが分かる。これらの社会学は社会の特定のサブ領域を対象とするものであり、カール・マンハイムによって連字符（ハイフン）社会学と名付けられた。

一方、数理-社会学も、連字符社会学ではあるが、「数理」は社会のサブ領域を表すというよりも、用いられる方法（数学）を表している。この意味で、数理社会学は「方法的連字符社会学」の一つであるといえる*1。

1.2.2 社会を「モデル」でみる

数理社会学を含む社会学の究極の目的は、端的に言えば「社会を理解する」ことである。「理解」の仕方には大きく次の2通りがある。

1. 記述的理解：社会の現実や社会現象がどのようなになっているか
2. 因果的理解：社会の現実や社会現象がどのような原因によって引き起こされたか

*1 ほかの方法的連字符社会学には、「計量社会学」や「理論社会学」がある。

これらの理解にあたって、概念・推論・理論の「数理化 (formalization)」によって明快な理解を目指すのが数理社会学である。

記述・説明のためにパッケージ化された概念・推論・理論の体系のことをモデル (model) という。そして、数学を使うモデルはとくに数理モデル (mathematical model) という。先の2通りの理解に対応して次の2通りのモデルのタイプがある。

1. 記述的モデル：社会の現実や社会現象の特徴や外面を写すモデル (ex 飛行機のプラモデル)
2. 因果的モデル：社会の現実や社会現象の原因と結果 (因果) のメカニズムを写すモデル (ex ゴム飛行機)

理論として求められる因果モデルのみならず、記述的モデルも社会理解のためには不可欠なものである。社会の現実の要約や記述のためには、概念の明確化や指数の背後にある前提の明確化が求められるし、その際フォーマライゼーションが必要となる。

1.2.3 フォーマル・セオリーとしての数理社会学

数理社会学のなかでも因果モデルに限定した場合、フォーマル・セオリー (formal theory) の考え方に重なってくる (高坂, 2006)。フォーマル・セオリーの目標は「数理モデルによって社会現象成立の因果メカニズムを解明する」ことである。

フォーマル・セオリーとしての数理社会学は演繹的な理論構築を志向する。ここで、演繹 (deduction) とは、一般的前提 (公理) から出発して特殊命題を論理的に導き出すことを指す。数理モデルを作成し分析する際にも、無前提に (先験的に、ア・プリオリに) 真となる少数の公理から出発してさまざまな命題を導出する。演繹と対比されるのが、帰納 (induction) であり、個々の観察された事実を積み重ねることによって一般的法則・原理を見出すことであり、従来の計量社会学的研究は帰納的な理論構築を志向していたと言える。

Lave and March (1975) の『社会科学におけるモデル入門』において、因果モデルの作り方として以下のような手順が示されている。

■因果モデルの作り方

1. ある事実を観察する

2. その事実がある未知のプロセスの最終結果だと見なす. そして, そのような結果を生み出したと思われるプロセスを推論し, モデル化する
3. そのモデルから別の結果 (デリベーション, インプリケーション) を導き出す
4. これらのインプリケーションが正しいかどうかを観察データと突き合わせチェックする. 必要ならばそのモデルを棄却し新しいモデルを構築する (K. ポパーの「反証可能性」)

特に数理モデルの場合, 2. のモデル化の際の公理の設定と 3. における命題の導出, 4. の経験的妥当性の検証に数学言語が用いられる.

また, 数理モデルには以下のような特徴があると言われる.

■数理モデルの特徴

- 数学言語を用いることで推論の論理的妥当性を確保することができる. 少なくとも論理的な間違いを指摘してもらえる.
- 数学言語を用いることで厳密な分析が可能になる. どのような条件の下でどのような結果が得られるかを厳密に把握できる.
- 数理モデルでは, 同様の説明力であればシンプルなものの方が好まれる (オッカムのカミノリ).
- 数理モデルはミクロ・マクロリンクの説明にもっとも大きな効果を上げる.

1.2.4 ミクロ・マクロリンク

数理モデルの特徴のうち, ミクロ・マクロリンクについてさらに解説する.

Coleman (1990) は, 社会学的説明の特徴としてミクロ・マクロリンク (micro-macro linkage) を指摘し, それを図 1.1 のような模式図で説明している.

社会現象のマクロ・レベルでの観察では, t 時点の状態 $X(t)$ から次の時点での状態 $X(t+1)$ への変動が観察される. しかしながら, その社会変動の説明においては, マクロな社会状態が人びとの考え方や価値観・意識にいかん影響を与えるか (マクロ・ミクロ), そうした意識の変化がどのような (合理的な) 行動をもたらすか (ミクロ・ミクロ), そして最終的にそうした行動の集積がどのような社会状態として帰結するか (ミクロ・マクロ), というミクロレベルを経由した説明が必要であることを指摘

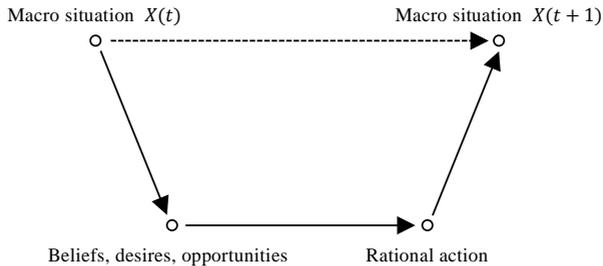


図 1.1 コールマン・バート (Coleman, 1990)

している。

Coleman (1990, 24–31) は、典型的なマイクロ・マクロリンクによる説明様式として、以下の2つの例を挙げている。

- (1) ウェーバー『プロ倫』：プロテスタントの宗教教義→価値→経済行動→資本主義
- (2) 革命の欲求不満理論：改善された社会状態→欲求不満→攻撃→革命

マクロレベルとマイクロレベルをつなぐ2つのメカニズム「マクロ状態のマイクロレベルでの反映、その規則的ゆがみ」「行動のネットワーク上での集積」、これらを少ない前提から記述する際に、数理モデルは大きな力を発揮する。

1.2.5 モデル・スペキュレーション

モデル・スペキュレーション (model speculation) とは、単純な「モデル」を使って、現実のメカニズムを推論しようという思考方法である (Lave and March, 1975; 小林・木村, 1991, 6–7)。

■例 学生食堂における席取り 『考える社会学』(小林・木村, 1991, 7–15) の例をもとに、学生食堂において席取りが発生するメカニズムについて考えてみよう (【別紙資料参照】)。

■例 交際と友人関係 『社会科学におけるモデル入門』(Lave and March, 1975, 8–13) の例をもとに、交際と友人関係のパターンを形成するメカニズムを考えてみよ

う（【別紙資料参照】）。

■例）トイレtpペーパー騒動 1973年の原油価格の引き上げによるオイルショックをきっかけにしてトイレtpペーパーの買い占め騒動が起きた*2。

また、最近では2020年初頭の新型コロナウイルス感染症（COVID-19）の拡大によって、世界各地でトイレtpペーパーが不足したことが記憶に新しい。

このような「買い占め（panic buying）」は、どのようなメカニズムで起きるのだろうか？ 自分自身の経験やメディアで報じられたことを踏まえてメカニズムを考えてみよう。

課題 1.2. COVID-19に関連した「買い占め」現象についてメカニズムを考えてみよう。

1.2.6 数理モデルと計量モデル【Advanced】

数理社会学で用いられる数理モデル（フォーマル・モデル）と計量社会学に用いられる回帰モデルなどの計量モデルは全く別種のものではなく、数学言語を用いたモデルという点では共通している。しかし、力点の違いがある。

フォーマル・モデルは、以下のような特徴を持つ。

- (1) より現実的なメカニズムの想定
- (2) 結果的に強いパラメータ制約
- (3) 結果的に低い経験的データとの適合性

反対に、線型モデルを想定するような伝統的な計量モデルは、以下のような特徴を持つ。

- (1) メカニズムの想定が非現実的（あるいは想定がない、あるいは自覚していない）
- (2) 弱い、あるいはほとんどないパラメータ制約（データ任せ）

*2 顛末はWikipediaの「トイレtpペーパー騒動」(<https://ja.wikipedia.org/?curid=926638>)に詳しい。

- (3) 結果的に高い経験的データとの適合性（というかそうなるようにモデルを後付けて作る）

つまり、演繹的にメカニズム優先にモデルを作るか、帰納的にデータへのフィット優先にモデルを作るかの違いがある。

計量でも最近では、データの分布生成メカニズムの明示化を志向した「(ベイジアン) 統計モデリング」の考え方が拡がりつつある (浜田他, 2019).

第2章

囚人のジレンマとゲーム理論

本章では、「囚人のジレンマゲーム」に焦点を当てながらゲーム理論の初歩を導入する。囚人のジレンマゲーム（PD ゲーム）は、社会学の根本問題である秩序問題を表現するものとして、また、個人的合理性を前提とした上でいかにして人々の協力的行動を引き出すかという社会的ジレンマ問題を表現するものとして、長らく社会学者の関心を集めてきた。ここでは、標準型ゲームとしての囚人のジレンマゲームの構造を検討し、さらに無限繰り返しゲームの枠組みを導入することでジレンマが回避できる可能性があることを示す。

2.1 2つのゲーム

2.1.1 グーパージャンケン

グーとパーだけで行う特殊なジャンケンを考える。プレイヤーは2人で、結果に応じて第三者から次の金額が支払われる。

表 2.1 グーパージャンケン

		プレイヤー 2	
		グー	パー
プレイヤー 1	グー	5 千円, 5 千円	0 円, 1 万円
	パー	1 万円, 0 円	1 千円, 1 千円

お互いのプレイヤーは何を出すか、互いに知らないとする。また、お互いのプレイヤーは自分の取り分をなるべく大きくしようとしているとする。このとき、あなたが

一方のプレイヤーであれば、あなたはグーとパー、どちらを選択するだろうか？

課題 2.1. グーパージャンケンで自分ならどの手を出すか？ なぜそう考えるかを説明してみよう。

2.1.2 囚人のジレンマ

次の例はゲーム理論の中でも最も有名なゲームである。

2人のギャングが逮捕され、刑務所に拘留されている。2人は、互いに話をしたり、メッセージを交換したりすることが絶対にできない状態で、独房に入られている。警察は、重罪で2人を有罪にするだけの十分な証拠はもっていないことを認めている。そのため、それより軽微な罪で、ともに1年の禁固刑に処す意向をもっている。警察は同時に、2人の囚人に(……)取引をもちかける。それは、もし相手に不利となる証言をするなら釈放してやろう、ただしパートナーは本件で3年の禁固刑に処せられる、というものである。(……)もし、両方が相手に不利となる証言をした場合は、2人とも2年の刑になるというのだ。(Poundstone, 1992, 154-5)

あなたが囚人の一方だとすると、あなたは黙秘を通すだろうか、それとも自白するだろうか？

表 2.2 囚人のジレンマ

		プレイヤー 2	
		黙秘	自白
プレイヤー 1	黙秘	1年, 1年	3年, 0年
	自白	0年, 3年	2年, 2年

2.2 ゲームとは何か

これらの状況は標準型ゲームとしてみると同型の構造をもっている。ゲーム理論が扱うゲームにはプレイヤー同士の協力・提携を想定した「協力ゲーム」と、それらを想定しない「非協力ゲーム」がある。本講義で扱うのは非協力ゲームの1つである標準型ゲーム (game in normal form) である*1。標準型ゲームは各プレイヤーが同時に（あるいは各々の手を知らずに）手を出すようなゲームである（例えばジャンケン）。もう1つの非協力ゲームの形としては展開型ゲーム (game in extensive form) があるが*2、これはプレイヤーが交互に手を出すようなゲームである（例えば将棋やチェス）。

さて、ここでいうゲーム (game) とは、現実にかかるさまざまな「ゲーム的状況」の数理モデルである。ゲーム的状況とは「複数の意志決定主体または行動主体が存在し、それぞれ一定の目的の実現を目指して相互に依存し合っている状況」(岡田, 2011, 2) のことをいう。意志決定主体のことをゲーム理論ではプレイヤー (player) という。プレイヤーは人である必要はなく、集団であっても何らかの生物であってもよい。プレイヤーは「自分の目的を達成するために、相互依存状況下において最も適した行為を選択する」という意味で合理的 (rational) であると仮定される。

例えば、複数の企業（プレイヤー）が利益の最大化（目的）のために、市場競争に参入する状況（相互依存状況）や、国家間の外交交渉、はたまた夫婦間の家事労働分担の決め方など、さまざまな社会・経済・政治的状況をゲームとして記述することができる。

そして、ゲーム理論の目的は、こうしたゲーム状況からどのような結果（解）がもたらされるかを分析することにある。

*1 戦略型ゲーム、同時手番ゲームともいわれる。

*2 逐次手番ゲームともいわれる。

2.3 標準型ゲームの構成要素

標準型ゲームは以下の3つの要素によって構成される。つまり、この3つについて定義を与えてやると1つの標準型ゲームができる。

- (1) ゲームのプレイヤー
- (2) 各プレイヤーのとりうる戦略
- (3) 戦略の組み合わせごとに各プレイヤーが受け取る利得（利得関数）

2.3.1 囚人のジレンマの構成要素

(1) プレイヤー

プレイヤー集合を N と表し、各プレイヤーを自然数で表す*³。 $N = \{1, 2\}$ 。

(2) 戦略

プレイヤー i のとりうる戦略の全体を戦略集合 (strategy set) と呼び S_i で表す。 S_i に属する任意の戦略を s_i と表す。戦略のことを、くだけた言い方として「手」ということもある。集合論の表記で表せば $s_i \in S_i$ である*⁴。囚人のジレンマの例でいえば

$$S_1 = \{ \text{黙秘}, \text{自白} \}$$

$$S_2 = \{ \text{黙秘}, \text{自白} \}$$

である。さらに、すべての可能な戦略の組み合わせを考える。囚人のジレンマの例でいえば、

$$S_1 \times S_2 = \{ (\text{黙秘}, \text{黙秘}), (\text{黙秘}, \text{自白}), (\text{自白}, \text{黙秘}), (\text{自白}, \text{自白}) \}$$

である*⁵。これらの要素はゲーム状況の起こりうる結果を示している。

*³ 中括弧 $\{ \}$ は集合の中身を表す。

*⁴ $a \in A$ は要素 a が集合 A に属していることを示す。

*⁵ 集合 A, B の要素の可能な組み合わせの集合を集合 A, B の直積といい、 $A \times B$ で表す

(3) 利得 (利得関数)

それぞれの結果に対してプレイヤーの中で「望ましさの程度」が決まっているとする。これを選好 (preference) という。この望ましさの程度を数値に置き換えたものが、各プレイヤーのそれぞれの結果についての利得 (payoff) である。それぞれの結果について利得を対応させる関数を利得関数 (payoff function) といい、プレイヤー i のもつ利得関数を u_i で表す*6。

各プレイヤーは他のプレイヤーの選択を予測しながら、自らの利得を最大化するような戦略を選択する。同時に、各プレイヤーは他のプレイヤーも自分と同様の考え方にもとづき戦略を選択すると考えている。これがプレイヤーの合理性のより具体的な意味である*7。利得を最大化する戦略を選ぶためには、利得の数値そのものではなく、利得間の大小関係が本質的に重要な情報となる。ゆえに、利得の大小関係が変わらない限り、どのような利得関数を仮定しても、ゲームの利得構造自体は同一である。

囚人のジレンマの例で、刑期にマイナスを付けたものがプレイヤーの利得だとすると、各プレイヤーの利得関数 u_i は以下ようになる。

$$u_1 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ll} u_1(\text{黙秘}, \text{黙秘}) = -1, & u_1(\text{黙秘}, \text{自白}) = -3 \\ u_1(\text{自白}, \text{黙秘}) = 0, & u_1(\text{自白}, \text{自白}) = -2 \\ u_2(\text{黙秘}, \text{黙秘}) = -1, & u_2(\text{黙秘}, \text{自白}) = 0 \\ u_2(\text{自白}, \text{黙秘}) = -3, & u_2(\text{自白}, \text{自白}) = -2 \end{array}$$

2.3.2 利得表

ところで、2人ゲームでそれぞれの戦略と利得を表 2.3 のように表したものを、そのゲームの利得表 (payoff table) という。

*6 利得は実数集合 \mathbb{R} の要素である。

*7 より厳密には「先読み合理性」といわれることがある (石原・金井, 2002, 5-6)。

表 2.3 2×2 対称ゲームの一般的記述

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	<i>R, R</i>	<i>S, T</i>
<i>D</i>	<i>T, S</i>	<i>P, P</i>

表 2.1 のグーパージャンケンと表 2.2 の囚人のジレンマは、表 2.3 の利得の表記でいえば、各プレイヤーとも

$$T > R > P > S$$

となる利得関数をもっており、ゲームの利得構造としては同一である

2.3.3 標準型ゲームの構成要素の一般的記述【Advanced】

(1) プレイヤー

プレイヤー集合を N と表し、各プレイヤーを自然数で表す. $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

(2) 戦略

プレイヤー i のとりうる戦略の全体を戦略集合と呼び S_i で表す.

$$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

$$(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$$

(3) 利得 (利得関数)

任意の i について $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ が定義されている.

このとき、 $G = (N; S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n)$ を標準型ゲームという.

2.4 支配戦略

2.4.1 支配戦略の組

再びグーパージャンケンについて考えてみよう。

表 2.4 グーパージャンケン (再録)

	グー	パー
グー	5, 5	0, 10
パー	10, 0	1, 1

まずはプレイヤー 1 に焦点を当てる。プレイヤー 2 が「グー」をとったとき、プレイヤー 1 は、

$$u_1(\text{パー}, \text{グー}) = 10 > 5 = u_1(\text{グー}, \text{グー}) \quad (2.1)$$

なので、「パー」を選んだ方が得である。同様に、プレイヤー 2 が「パー」をとったとき、プレイヤー 1 は、

$$u_1(\text{パー}, \text{パー}) = 1 > 0 = u_1(\text{グー}, \text{パー}) \quad (2.2)$$

なので、やはり「パー」を選んだ方が得である。つまり、相手がどのような手を選んだとしても、プレイヤー 1 は「パー」を選んだ方が常に得をする。ゆえに、プレイヤー 1 が合理的であれば常に「パー」を選択するだろう。プレイヤー 2 についても同様の推論で常に「パー」を選択すると予測できる。

結局、実現する結果は (パー, パー) で、それぞれのプレイヤーに 1 が支払われると結論づけることができる。

このゲームの「パー」のような戦略、つまり、他のプレイヤーがどのような戦略を選んでも、もっとも利得が高くなるような戦略のことを (強) 支配戦略 ((strictly) dominant strategy) という*8。ここでの結果の分析は、支配戦略の組を見出すという方法で行われたことになる。

*8 より形式的には、プレイヤー i の戦略 $\hat{s}_i \in S_i$ が強支配戦略であるとは、すべての $s_j \in S_j$ ($i \neq j$)

2.4.2 支配される戦略の消去

しかしながら、どのようなゲームでも支配戦略の組が見つかるとは限らない。例えば表 2.4 のグーパージャンケン の利得行列を少し変えた次のゲームを検討しよう。

表 2.5 グーパージャンケン 2

	グー	パー
グー	5, 5	0, 10
パー	10, 1	1, 0

プレイヤー 1 については先程と同様に「パー」が支配戦略であることが分かる。一方、プレイヤー 2 についてみると、

$$u_2(\text{グー}, \text{グー}) = 5 < 10 = u_2(\text{グー}, \text{パー}) \quad (2.3)$$

$$u_2(\text{パー}, \text{グー}) = 1 > 0 = u_2(\text{パー}, \text{パー}) \quad (2.4)$$

なので、「パー」も「グー」も支配戦略ではない。

しかし、このようなケースでも次のように考えることができる。

プレイヤー 1 にとって「パー」が支配戦略であるならば、支配される戦略である「グー」は決して選ばないと考えられる。というのも、「グー」を選べば必ず損をしてしまうからである。そして、プレイヤー 2 も合理的な推論によってプレイヤー 1 が「グー」を決して選択しないことを予測することができる。つまり両プレイヤーにとってプレイヤー 1 の選択肢である「グー」は考慮しなくてもよいものなのである。ゆえに、表 2.5 は次のように書き換えることができる。

支配される戦略を消去したあとのゲームでは、プレイヤー 2 のみが選択を行う。このとき、

$$u_2(\text{パー}, \text{グー}) = 1 > 0 = u_2(\text{パー}, \text{パー}) \quad (2.5)$$

とすべての $s_i \in S_i \setminus \{\hat{s}_i\}$ ($S_i \setminus \{\hat{s}_i\}$ は要素 \hat{s}_i を除く S_i を表す) について

$$u_i(s_1, s_2, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_n) > u_i(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n)$$

が成り立つことをいう。

表 2.6 グーパージャンケン 2 (支配される戦略を消去)

	グー	パー
パー	10, 1	1, 0

なので、結局、戦略の組 (パー, グー) が実現すると予測することができる。

このように支配される戦略を段階的に消去し、より簡単なゲームに還元することによって最終的に実現する戦略の組を予測することができる場合がある。

しかし、この方法でも実現する戦略の組を予測することができない場合が数多く存在する。このために、より一般的な概念として最適反応戦略という考え方を導入する。

2.5 最適反応戦略

2.5.1 両性の戦い

以下のゲームは「両性の戦い」として知られるゲームである (Gibbons, 1992, 12-3)。もともとはカップルがデートの行き先を決めるという設定であったが、より抽象的にプレイヤー 1 とプレイヤー 2 としておこう。プレイヤー 1 はボクシングよりもオペラに、プレイヤー 2 はオペラよりもボクシングに行きたがっている。しかし 2 人とも別々に行動するよりも一緒にいた方がいいと思っている。利得表は以下の通りである。

表 2.7 両性の戦い

	オペラ	ボクシング
オペラ	2, 1	0, 0
ボクシング	0, 0	1, 2

プレイヤー 1 について、

$$u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 2 > 0 = u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) \quad (2.6)$$

$$u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) = 0 < 1 = u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) \quad (2.7)$$

同様にプレイヤー2について,

$$u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}) = 1 > 0 = u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) \quad (2.8)$$

$$u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) = 0 < 2 = u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) \quad (2.9)$$

である。つまり、両プレイヤーとも支配戦略をもっていない。ゆえに、支配戦略を用いた結果の予測ができない。

そこで、より包括的な概念として最適反応戦略という考え方を導入する。

2.5.2 最適反応戦略の定義

他のプレイヤーがとる戦略の組が与えられたとき、自らの利得を最大化する戦略を最適反応戦略 (best response strategy) といい、プレイヤー i の最適反応戦略を $s_i^* \in S_i$ と表す*9。

たとえば、先の表 2.7 の両性の戦いの場合、プレイヤー1にとっての最適反応は次のようになる。

プレイヤー2がオペラ \Rightarrow 最適反応戦略 s_1^* はオペラ

プレイヤー2がボクシング \Rightarrow 最適反応戦略 s_1^* はボクシング

同様に、プレイヤー2にとっての最適反応は次のようになる。

プレイヤー1がオペラ \Rightarrow 最適反応戦略 s_2^* はオペラ

プレイヤー1がボクシング \Rightarrow 最適反応戦略 s_2^* はボクシング

*9 より形式的には,

$$u_i(s_1, s_2, \dots, s_i^*, \dots, s_n) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n) \quad (2.10)$$

のとき、プレイヤー i の戦略 $s_i^* \in S_i$ は、他のプレイヤーがとる戦略の組 $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ に対する最適反応戦略であるという。

2.6 ナッシュ均衡

2.6.1 最適反応戦略の組み合わせ

ここで、表 2.7 の両性の戦いにおける 4 つの戦略の組について、他のプレイヤーの戦略を所与とした場合のもう一方のプレイヤーの最適反応戦略を考えてみよう。

表 2.8 両性の戦いにおける最適反応戦略

戦略の組 (s_1, s_2)	s_1^*	s_2^*
1. (オペラ, オペラ)	オペラ	オペラ
2. (オペラ, ボクシング)	ボクシング	オペラ
3. (ボクシング, オペラ)	オペラ	ボクシング
4. (ボクシング, ボクシング)	ボクシング	ボクシング

行 2 に注目する。戦略の組 (オペラ, ボクシング) が実現したと仮定してみよう。このとき両プレイヤーの戦略とも、相手の戦略に対する最適反応にはなっていない。ゆえに、プレイヤーの合理性から考えて、両プレイヤーは戦略を最適反応であるもう一方の戦略に変更しようとするだろう。同様のことは行 3 の (ボクシング, オペラ) にもいえる。つまり、行 2, 3 の戦略の組がこのまま実現するとは考えられない。

一方、行 1 の (オペラ, オペラ) は両プレイヤーの戦略とも、相手の戦略に対する最適反応になっている。つまり、いったん (オペラ, オペラ) が実現した場合、どちらのプレイヤーもちがう戦略に変更しようとは考えない。行 4 の (ボクシング, ボクシング) にも同じことが当てはまる。

いったん実現したら、結果が変わらないという意味において、戦略の組 (オペラ, オペラ) と (ボクシング, ボクシング) は均衡状態にある。こうしたゲームにおける均衡状態をとくにナッシュ均衡 (Nash equilibrium) という^{*10}。

^{*10} 数学者の John F. Nash によって定式化されたので、ナッシュ均衡という。ナッシュの数奇な人生については、映画『ビューティフル・マインド (Beautiful Mind)』(2001)を参照。

2.6.2 ナッシュ均衡の定義

戦略の組において、それぞれのプレイヤーの戦略が互いに他のプレイヤーの戦略の組に対して最適反応戦略となっているとき、その戦略の組をナッシュ均衡 (Nash equilibrium) という*11.

別の言い方をすれば、あるプレイヤー 1 だけが戦略を変えても得をしない、ということがすべてのプレイヤーについて成立するとき、その戦略の組はナッシュ均衡である。この定義を 2 人ゲームについて数学的に表すと次のようになる。

定義 2.1 (2 人ゲームにおけるナッシュ均衡). 2 人ゲームにおいて、戦略の組 (s_1^*, s_2^*) がナッシュ均衡であるとは、プレイヤー 1 の戦略集合 S_1 の要素であるどのような s_1 に対しても

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \quad (2.11)$$

が成り立ち、かつ、プレイヤー 2 の戦略集合 S_2 の要素であるどのような s_2 に対しても

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \quad (2.12)$$

が成り立つことである*12.

プレイヤーが十分に合理的であるならば、ゲームの結果としてナッシュ均衡が実現すると予測することができる*13. 逆にナッシュ均衡でないことは次のように定義できる。

11 より厳密に言えば、戦略の組 (s_1^, \dots, s_n^*) がナッシュ均衡であるとは、各プレイヤー i の戦略 s_i^* が他の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組 $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ に対する最適反応戦略となっていることをいう。

*12 n 人ゲームにおいては、すべてのプレイヤー i について、 S_i の要素であるどのような s_i に対しても

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \quad (2.13)$$

が成り立つことがナッシュ均衡の必要十分条件である。

*13 しかし、ナッシュ均衡という概念自体は、プレイヤーの合理性に基づき均衡の安定性を保証するロジックは備えていても、なぜこの均衡が実現するかを説明するものではない、という議論がある (石原・金井, 2002, 25-8)。この議論は考察に値するものであるが、本講義の射程範囲を超えるレベルの議論であるため、ここではこれ以上取り上げない。

定義 2.2 (2人ゲームにおける非ナッシュ均衡). 2人ゲームにおいて, 戦略の組 (s'_1, s'_2) がナッシュ均衡でないとは, 次のいずれかもしくは両方が成立することという.

- $u_1(s'_1, s'_2) < u_1(s''_1, s'_2)$ を満たすプレイヤー 1 の戦略 $s''_1 (\neq s'_1)$ が存在する.
- $u_2(s'_1, s'_2) < u_2(s'_1, s''_2)$ を満たすプレイヤー 2 の戦略 $s''_2 (\neq s'_2)$ が存在する.

2.6.3 両性の戦いのナッシュ均衡

表 2.7 の両性の戦いにおけるナッシュ均衡を確認しよう.

(1) (オペラ, オペラ) について,

$$\begin{aligned} u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}) &= 2 > 0 = u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}), \\ u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}) &= 1 > 0 = u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}). \end{aligned}$$

ゆえに, (オペラ, オペラ) はナッシュ均衡である.

(2) (オペラ, ボクシング) について,

$$\begin{aligned} u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) &= 0 < 1 = u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}), \\ u_2(\text{オペラ}, \text{ボクシング}) &= 0 < 1 = u_2(\text{オペラ}, \text{オペラ}). \end{aligned}$$

ゆえに, (オペラ, ボクシング) はナッシュ均衡でない.

(3) (ボクシング, オペラ) について,

$$\begin{aligned} u_1(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) &= 0 < 2 = u_1(\text{オペラ}, \text{オペラ}), \\ u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}) &= 0 < 2 = u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}). \end{aligned}$$

ゆえに, (ボクシング, オペラ) はナッシュ均衡でない.

(4) (ボクシング, ボクシング) について,

$$\begin{aligned} u_1(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) &= 1 > 0 = u_1(\text{オペラ}, \text{ボクシング}), \\ u_2(\text{ボクシング}, \text{ボクシング}) &= 2 > 0 = u_2(\text{ボクシング}, \text{オペラ}). \end{aligned}$$

ゆえに, (ボクシング, ボクシング) はナッシュ均衡である.

結局、ナッシュ均衡は (オペラ, オペラ), (ボクシング, ボクシング) の2つである。

2.6.4 囚人のジレンマのナッシュ均衡

ふたたび囚人のジレンマゲームを考えよう。

表 2.9 囚人のジレンマゲーム

	黙秘	自白
黙秘	-1, -1	-3, 0
自白	0, -3	-2, -2

このとき、(自白, 自白) が唯一のナッシュ均衡となる。一般に、支配戦略の組、もしくは支配戦略の段階的消去で残る戦略の組は必ずナッシュ均衡になる。ただし、逆は必ずしも真ならず。つまり、ナッシュ均衡であるからといって、それが支配戦略の組、もしくは支配戦略の段階的消去で残る戦略の組であるとは限らない。

課題 2.2. 表 2.9 の囚人のジレンマゲームで (自白, 自白) が唯一のナッシュ均衡となることを確認しよう。

2.7 パレート最適

囚人のジレンマゲームにおいて、(自白, 自白) が唯一のナッシュ均衡となることがわかった。そこで、次にこの結果が社会的に（この場合2人にとって）望ましい結果であるかを考えることにしよう。このとき用いられる基準がパレート最適 (Pareto optimality) である^{*14}。

^{*14} イタリアの経済学者 Vilfredo Pareto が定式化した。

2.7.1 パレート最適の定義

パレート最適とはもともと財の社会的分配状態の望ましさを評価する1つの基準であった。ゲーム状況に特化してパレート最適の定義を与えると以下ようになる。

ある戦略の組 (s_1, \dots, s_n) から別の戦略の組へと移行しようとする時、少なくとも1人のプレイヤーの利得が減少してしまう場合、その戦略の組 (s_1, \dots, s_n) はパレート最適である (Pareto optimal) という。逆に、誰の利得を下げることもなく、かつ、少なくとも1人にとっては利得が大きくなるような戦略の組が他に存在する場合、その戦略の組 (s_1, \dots, s_n) はパレート最適でないという。2人ゲームについて数学的な定義を与える。

定義 2.3 (2人ゲームにおけるパレート最適). 2人ゲームにおいて、戦略の組 (s_1, s_2) がパレート最適であるとは、他のすべての可能な戦略の組 (s'_1, s'_2) について、

$$u_1(s_1, s_2) > u_1(s'_1, s'_2) \quad (2.14)$$

もしくは

$$u_2(s_1, s_2) > u_2(s'_1, s'_2) \quad (2.15)$$

が成立することである^{*15}。

定義 2.4 (2人ゲームにおけるパレート非最適). 2人ゲームにおいて、戦略の組 (s_1, s_2) がパレート最適でないとは、ある他の戦略の組 (s'_1, s'_2) が存在し、

$$u_1(s_1, s_2) < u_1(s'_1, s'_2) \quad \text{かつ} \quad u_2(s_1, s_2) \leq u_2(s'_1, s'_2) \quad (2.17)$$

もしくは

$$u_2(s_1, s_2) < u_2(s'_1, s'_2) \quad \text{かつ} \quad u_1(s_1, s_2) \leq u_1(s'_1, s'_2) \quad (2.18)$$

^{*15} n 人ゲームの場合は、戦略の組 (s_1, \dots, s_n) がパレート最適であるとは、他のすべての可能な戦略の組 (s'_1, \dots, s'_n) について、

$$\exists i \in N, u_i(s_1, \dots, s_n) > u_i(s'_1, \dots, s'_n) \quad (2.16)$$

が成立することである。

が成立することである*16.

例えば、表 2.7 の両性の戦いにおけるナッシュ均衡 (オペラ, オペラ), (ボクシング, ボクシング) はどちらもパレート最適である。

2.7.2 囚人のジレンマの何がジレンマか？

表 2.9 の囚人のジレンマゲームでは (自白, 自白) がナッシュ均衡になった。このとき両プレイヤーは 2 年の刑期を課せられることになる。では、この実現する戦略の組 (自白, 自白) は果たしてパレート最適だろうか？ 別の戦略の組 (黙秘, 黙秘) と比べてみると

$$u_1(\text{自白}, \text{自白}) = -2 < -1 = u_1(\text{黙秘}, \text{黙秘})$$

$$u_2(\text{自白}, \text{自白}) = -2 < -1 = u_2(\text{黙秘}, \text{黙秘})$$

なので、(自白, 自白) はパレート最適ではない。言い換えると、両プレイヤーとも黙秘した場合は刑期が 1 年軽くなり、双方にとって状況は改善されるのである。しかしながら、合理的なプレイヤーを仮定した場合、よりよい結果が実現しなくなる。これが囚人のジレンマのジレンマたるゆえんである。そしてこの問題を専門用語で言えば、ナッシュ均衡がパレート最適でないこと、ということができるのである*17。

*16 n 人ゲームの場合は、戦略の組 (s_1, \dots, s_n) がパレート最適でないとは、ある戦略の組 (s'_1, \dots, s'_n) が存在し、

$$\forall i \in N, u_i(s_1, \dots, s_n) \leq u_i(s'_1, \dots, s'_n), \text{ かつ } \exists j \in N, u_j(s_1, \dots, s_n) < u_j(s'_1, \dots, s'_n) \quad (2.19)$$

が成立することである。

*17 パレート最適は、社会的な望ましさについての 1 つの基準と考えられているが、次のような問題もある。例えば、社会的な財の総量が 100 と決まっているとする。これを 2 人で分けるケースを考える。このとき財をどのように分けたとしても、その分け方は他の分け方に対してパレート最適になっているのである。というのも、どのような分け方に変更したとしても、どちらかの財の量は必ず減少するからだ。ゆえに財の分け方が (50, 50) であっても、(1, 99) であっても、これらをパレート最適性の基準で優劣を付けることはできない。

2.8 無限繰り返しゲーム

ここまで考えてきたゲームは、プレイヤーが同時に手を出す 1 回限りのゲームであった。しかしながら、現実社会のゲーム状況、つまり複数の主体が相互依存状況のもとで意志決定を行う状況を考えると、同様の状況が繰り返し生じることがある。例えば、同一の売り手と買い手が同じような取引を繰り返す場合や、友人や夫婦間の関係などである。

表 2.10 囚人のジレンマ例（再掲）

	C	D
C	3, 3	0, 5
D	5, 0	1, 1

このことをとくに囚人のジレンマ状況について考えてみよう（表 2.10）。相手と 1 回だけのゲームを行い、そのあとは二度と会わないのであれば、合理的なプレイヤーは躊躇なく非協力 D を選択するだろう。しかしながら、その相手との関係がその後も続くとすれば話は変わってくるかもしれない。例えば互いに信頼し合える関係ならば協力関係 (C, C) が続くかもしれない^{*18}。

そこで、繰り返し続くゲームにおいて、協力関係が成立する可能性を理論的に検討してみよう。

2.8.1 無限繰り返しゲームの定義

ある標準型ゲーム G が際限なく繰り返される状況を考えよう。このとき 2 人のプレイヤーはそれぞれの回のゲームをプレイするにあたって、過去のすべてのゲームの結果を知っているとす。このような繰り返されるゲームをすべてひっくるめて、1 つのゲームと見なすことにする。このゲームを G の無限繰り返しゲーム (infinitely

^{*18} そればかりか現実には、実験状況で囚人のジレンマゲームを被験者同士でプレイさせると、互いに知らないもの同士であっても協力状態が達成されるケースが少なくないことが知られている (Rapoport and Chammah, 1965)。

repeated game) といひ G^∞ で表す*19. 無限繰り返しゲームはまたスーパーゲーム (super game) とも呼ばれる. 元のゲーム G を無限繰り返しゲームの成分ゲーム (component game) と呼ぶ.

2.8.2 無限繰り返しゲームにおける戦略

無限繰り返しゲームにおけるプレイヤーの戦略とは, 過去のゲームの結果にもとづいて毎回のゲームにおける手*20を決めるような, 「行動の予定表」あるいは「行動のプログラム」である. 無限繰り返しゲームにおけるプレイヤー i の戦略を一般的に $ss_i \in SS_i$ と表す. このような戦略は原理的には無限に種類がありうる. ここではしばしば分析に取り上げられる代表的な4つの戦略を紹介する.

- (1) **All C (AC)**: 過去のゲームの結果によらず, つねに C を出す.
- (2) **All D (AD)**: 過去のゲームの結果によらず, つねに D を出す.
- (3) **トリガー (Tr)**: 一番最初は C を出す. それ以降は相手プレイヤーが C を出す限り C を出す. 相手が一度でも D を出せば, その次のゲーム以降はつねに D を出す.
- (4) **しっぺ返し (TFT)**: tit for tat とも呼ばれる. 一番最初は C を出す. 2回目以降は相手が前回出した手と同じ手を出す.

トリガー戦略は, 協力には協力をもって応じるが, 一度でも裏切る (つまり非協力に移行する) と以後二度と協力しないという強い対抗手段をもつ戦略である. 同様に, しっぺ返し戦略は, 協力には協力を裏切りには裏切りをもって対抗する戦略であり, トリガー戦略と同様に裏切りに対する対抗手段を組み込んでいる. ただし, 相手が一度裏切っても, 相手がふたたび協力するなら協力に戻るという「赦し」を含んでいる分, より緩やかな戦略であると言えよう. まとめると, トリガー戦略, しっぺ返し戦略とも協力行動をベースに, 相手の裏切りに対する対抗手段をもつ戦略である.

*19 ゲームの終了時点がいつになるか不確かな繰り返しゲーム, というのが無限繰り返しゲームの現実的な解釈である.

*20 より正確に言えば, 成分ゲーム G における戦略 s_i のことである.

課題 2.3. ここで挙げた戦略の他に、無限繰り返しゲームにおける戦略としてどのようなものが考えられるだろうか。自由に考えてみよう。

2.8.3 無限繰り返しゲームにおける利得

無限繰り返しゲームにおける利得は、各々の成分ゲームにおいて得られるであろう利得の総合計であるとする。ただし、人は将来のことであればあるほど利得を割り引いて評価すると仮定する^{*21}。無限繰り返しゲーム G^∞ の戦略を決めるのは、ゲームがスタートする前の時点であり、その時点でプレイヤーはゲームを繰り返していったときに得られるであろう利得を見積もる。ただし、将来のゲームであればあるほど、そのゲームで得られる利得の現時点での重要性もしくは価値は小さく見積もられると仮定する。この仮定は人間の一般的な認識傾向を表していると思なすことができる^{*22}。

この傾向を表現するために、割引因子 (discount factor) を導入し δ と表記する。ただし $0 < \delta < 1$ とする。そして t 回目のゲームで得る利得についての割引率 (discount rate) を δ^{t-1} と定義する。戦略の組 (ss_1, ss_2) において、プレイヤー i が t 回目のゲームで得る利得を u_{it} とすると、割引因子 δ をもつプレイヤー i の無限繰り返しゲーム G^∞ における利得は

$$U_i(\delta; ss_1, ss_2) = u_{i1} + \delta u_{i2} + \delta^2 u_{i3} + \delta^3 u_{i4} + \cdots + \delta^{t-1} u_{it} + \cdots \quad (2.20)$$

によって定義される。

例えば、表 2.10 の無限繰り返しゲームにおいて、両プレイヤーともに All C をとった場合を考えてみる。この場合各ゲームで実現する結果は (C, C) であり両プレイヤーとも、各ゲームにおいて 3 の利得を得る。つまり、 $i = 1, 2$ について

$$U_i(\delta; AC, AC) = 3 + \delta 3 + \delta^2 3 + \delta^3 3 + \cdots + \delta^{t-1} 3 + \cdots \quad (2.21)$$

^{*21} この仮定の意味について詳しくは佐々木 (2003, 251-5) を参照のこと。

^{*22} 例えば、今日もらえる 1 万円と 1 年後にもらえる 1 万円のどちらが実質的により大きな価値を持つかを考えてみよう。

であり、例えば $\delta = 0.9$ とすると

$$U_i(0.9; AC, AC) = 3 + (0.9)3 + (0.81)3 + (0.729)3 + \dots$$

となる。ここで式 (2.21) が初項が 3、公比が δ の無限等比数列の和であることに気付けば、無限等比数列の和の公式*23 より

$$U_i(\delta; AC, AC) = \frac{3}{1 - \delta} \quad (2.22)$$

と単純な式に変形できる。 $\delta = 0.9$ とすると $U_i(0.9; AC, AC) = 3/(1 - 0.9) = 30$ となる。

2.9 無限繰り返し囚人のジレンマゲームの結果の分析

以下、表 2.11 を成分ゲームとしてもつ無限繰り返しゲーム G^∞ の結果を検討する。

表 2.11 囚人のジレンマの一般的記述 (ただし $T > R > P > S$)

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	<i>R, R</i>	<i>S, T</i>
<i>D</i>	<i>T, S</i>	<i>P, P</i>

*23 初項 a 、公比 δ ($0 < \delta < 1$) の等比数列の和を

$$S_n = a + a\delta + a\delta^2 + \dots + a\delta^{n-1}$$

とする。この式の両辺に δ をかけると

$$\delta S_n = a\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \dots + a\delta^n$$

となる。第 1 式と第 2 式の差をとると $S_n - \delta S_n = a - a\delta^n$ となるので、結局まとめると

$$S_n = \frac{a(1 - \delta^n)}{1 - \delta}$$

となる。ここで $n \rightarrow \infty$ 、つまり n をだんだんと限りなく大きくしていく場合を考える。すると $0 < \delta < 1$ なので δ^n はだんだんと小さくなり、限りなく 0 に近づく。つまり、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 S_n は限りなく $a/(1 - \delta)$ に近づく。これを S_n の極限値といい、正確には

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - \delta}$$

と表記する。

2.9.1 4つの戦略の利得表

ここでは、2人のプレイヤーがそれぞれ All C, All D, トリガー, しっぺ返しという4つの戦略をもっているときの G^∞ の利得表をまとめることにしよう。まずは、戦略の組み合わせごとに得られる利得を計算しよう。

(1) All C, トリガー, しっぺ返しの組み合わせの対戦

トリガーもしっぺ返しも相手が C を出し続ける場合、自分も常に C を出す。ゆえに、All C, トリガー, しっぺ返しの3つの戦略（これを ss_i で示す）の組み合わせに対する利得は、両プレイヤーとも

$$U_i(\delta; ss_1, ss_2) = R + \delta R + \delta^2 R + \dots = \frac{R}{1-\delta}.$$

(2) All D 同士の対戦

両プレイヤーについて

$$U_i(\delta; AD, AD) = P + \delta P + \delta^2 P + \dots = \frac{P}{1-\delta}.$$

(3) All C と All D の対戦

プレイヤー1が All C, プレイヤー2が All D をとる場合を示す。

$$U_1(\delta; AC, AD) = S + \delta S + \delta^2 S + \dots = \frac{S}{1-\delta},$$

$$U_2(\delta; AC, AD) = T + \delta T + \delta^2 T + \dots = \frac{T}{1-\delta}.$$

(4) All D とトリガー, All D としっぺ返しの対戦

1回目は All D をとるプレイヤーは D , トリガーもしくはしっぺ返しをとるプレイヤーは C である。2回目以降は双方とも D をとる。ゆえに、プレイヤー1がトリガーもしくはしっぺ返しをとり、プレイヤー2が All D をとる場合、利得は

$$U_1(\delta; Tr, AD) = U_1(\delta; TFT, AD) = S + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 P + \dots = S + \frac{\delta P}{1-\delta},$$

$$U_2(\delta; Tr, AD) = U_2(\delta; TFT, AD) = T + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 P + \dots = T + \frac{\delta P}{1-\delta}$$

となる。

さて、これらの結果をもとに利得表を構成しよう（表 2.12）。ここで見やすさのためにすべての利得に $1 - \delta$ をかけている。この操作によって利得の大小関係が変わることはないので*24，ナッシュ均衡の分析には影響がない。ただしここで、

$$T_s = (1 - \delta)T + \delta P \qquad S_s = (1 - \delta)S + \delta P$$

とおく。

表 2.12 繰り返し囚人のジレンマの利得表（ただし $T > R > P > S$ ）

	All C	All D	トリガー	しっぺ返し
All C	R, R	S, T	R, R	R, R
All D	T, S	P, P	T_s, S_s	T_s, S_s
トリガー	R, R	S_s, T_s	R, R	R, R
しっぺ返し	R, R	S_s, T_s	R, R	R, R

2.9.2 非協力ナッシュ均衡

無限繰り返しゲームにおけるナッシュ均衡は、1 回だけの標準型ゲームにおけるナッシュ均衡とまったく同様に定義できる。すなわち、無限繰り返しゲームの戦略の組において、それぞれのプレイヤーの戦略が互いに他のプレイヤーの戦略の組に対して最適反応戦略となっているとき、その戦略の組はナッシュ均衡である。別の言い方をすれば、あるプレイヤー 1 人だけが戦略を変えても得をしない、ということがすべてのプレイヤーについて成立するとき、その戦略の組はナッシュ均衡である。

さて、表 2.12 を一瞥してすぐにわかることは、戦略が **All C** と **All D** だけの 2 人無限繰り返しゲームは、成分ゲームである囚人のジレンマゲームと利得構造上まったく同一であるということである。ゆえに戦略が All C と All D だけの 2 人無限繰り返しゲームでは、(All D, All D) が唯一のナッシュ均衡となる。

戦略の種類を拡大して、トリガーとしっぺ返しを加えても、(All D, All D) は δ の値にかかわらずに常にナッシュ均衡となる。このことを証明しよう。まず、プレイ

*24 $0 < \delta < 1$ であったことに注意。

ヤー 1 の All C への移行は

$$(1 - \delta)U_1(\delta; AD, AD) = P > S = (1 - \delta)U_1(\delta; AC, AD) \quad (2.23)$$

なので利得が減少する。次に、プレイヤー 1 がトリガーもしくはしっぺ返しへと移行すると、

$$(1 - \delta)P > (1 - \delta)S \iff P > S_s \quad (2.24)$$

なので、

$$(1 - \delta)U_1(\delta; AD, AD) = P > S_s = (1 - \delta)U_1(\delta; Tr, AD) = (1 - \delta)U_1(\delta; TFT, AD) \quad (2.25)$$

であり、やはり利得が減少する。プレイヤー 2 についても同様のことが成り立つので、ゆえに (All D, All D) はナッシュ均衡である*25。

2.9.3 協力状態が実現する可能性

では、やはり繰り返しゲームにおいても相互非協力のパレート最適でない均衡状態しか実現しないのだろうか？ 実はこのゲームにおいて (トリガー, トリガー), (しっぺ返し, しっぺ返し), (トリガー, しっぺ返し), (しっぺ返し, トリガー) がナッシュ均衡になる可能性がある。このことを論証しよう。

表 2.12 より、これら 4 種類の戦略の組がナッシュ均衡であるためには、

$$R \geq T_s \quad (2.26)$$

が成り立つ必要がある。これを δ についてまとめると、

$$\begin{aligned} R \geq T_s &\iff R \geq (1 - \delta)T + \delta P \\ &\iff \delta(T - P) \geq T - R \\ &\iff \delta \geq \frac{T - R}{T - P} \end{aligned} \quad (2.27)$$

*25 さらに、他の選択肢としてどのような戦略があったとしても (All D, All D) は常にナッシュ均衡となる。というのも、All D と対戦したときすべての回で結果的に D を出す戦略の場合、その戦略に変更しても利得は変化しない。また、少なくとも 1 回 C を出す戦略であれば $P > S$ なので、かならず利得は減少する。

となる。結局、 $\delta \geq (T - R)/(T - P)$ が成立するなら、トリガーとシッペ返しを組み合わせたによる4種類の戦略の組はナッシュ均衡となる。トリガーとシッペ返しを組み合わせたによる戦略の組がナッシュ均衡となりうるということは、結果的に各成分ゲームにおいて協力状態 (C, C) が永続するような均衡状態が実現しうるということに他ならない。そしてこの均衡状態は不等式 (2.27) が成立するならば、必ずパレート最適である。

ここで、イメージを持ちやすくするために実際の数値例を示す。無限繰り返しゲームの成分ゲームが表 2.11 で示されるゲームであったとすると、

$$\delta \geq \frac{5 - 3}{5 - 1} = 0.5$$

である。ではこの δ の条件は実質的にはどのような意味をもっているのだろうか？

以下に2つの方向からの解釈を示そう。

- (1) δ に注目すると、 δ が大きく1に近ければ近いほど、この条件が満たされる可能性が高くなる。つまり、プレイヤーが無限繰り返しゲームにおいて将来の利得の現在価値を高く評価すればするほど、永続的な協力関係が達成される可能性が高まる。
- (2) 不等式の右辺に注目すると、分子部分の $T - R$ は (C, C) の相互協力状態から1人だけ裏切りに移行した際の利得の純増分を示している。また、分母部分の $T - P$ は、裏切りに対して相手が対抗手段、つまり D に対して D をとった場合の利得の純減分を示している。つまり、不等式の右辺は「裏切りの誘惑の大きさ」と「裏切りに対する罰の大きさ」の関係を示していると見なすことができる。そして、「裏切りの誘惑の大きさ」よりも「裏切りに対する罰の大きさ」の方が大きければ大きいほど、低い割引率であっても協力関係が達成される可能性が高くなる。

2.10 フォーク定理【Advanced】

このように、1回限りのゲームでは非均衡状態となり実現されないより望ましい状態が、無限繰り返しゲームにおいてナッシュ均衡として実現される可能性がある、ということはゲーム理論研究においては古くから知られていた。こうした知見を一般的

に示したものが、いわゆるフォーク定理 (folk theorem) である。ここでは、フォーク定理そのものの詳細には触れないが^{*26}、(トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件について証明しておく。さらに、(しっぺ返し, しっぺ返し) がナッシュ均衡となる一般的条件について概観する。

2.10.1 (トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件

2 × 2 囚人のジレンマゲームを成分ゲームとする無限繰り返しゲーム G^∞ において、(トリガー, トリガー) がナッシュ均衡となる一般的条件は

$$\delta \geq \frac{T - R}{T - P} \quad (2.28)$$

である。以下これを証明する。2人のプレイヤーがトリガー戦略を用いるときのプレイヤーの総利得は

$$U_i(\delta; \text{Tr}, \text{Tr}) = R + \delta R + \delta^2 R + \dots = \frac{R}{1 - \delta} \quad (2.29)$$

である。もしプレイヤー1が t 回目 ($t = 1, 2, \dots$) に行動を D に変更するとしよう。するとプレイヤー2はその後 D を出し続けるので、プレイヤー1の t 回目以降の利得の総和はもっとも大きくて

$$\delta^{t-1} T + \delta^t P + \delta^{t+1} P + \dots = \delta^{t-1} \left(T + \frac{\delta P}{1 - \delta} \right) \quad (2.30)$$

である^{*27}。一方、両方ともにトリガー戦略を採り続ける場合の t 回目以降の利得の総和は、

$$\delta^{t-1} R + \delta^t R + \delta^{t+1} R + \dots = \delta^{t-1} \left(\frac{R}{1 - \delta} \right) \quad (2.31)$$

である。ゆえに

$$\delta^{t-1} \left(\frac{R}{1 - \delta} \right) \geq \delta^{t-1} \left(T + \frac{\delta P}{1 - \delta} \right) \quad (2.32)$$

^{*26} フォーク定理とその証明については、岡田 (2011, 6章), 神取 (2015) を参照。

^{*27} 相手が D を出しているときに、自分が得られる利得は P か S かの2種類であって、 $P > S$ である。ゆえに利得の総和がもっとも大きくなるのは、自らも D を出し続けて $t + 1$ 回以降 P を得ることである。

ならば、プレイヤー1のすべての可能な無限繰り返しゲームにおける戦略 ss_1 に対して

$$U_1(\delta; \text{Tr}, \text{Tr}) \geq U_1(\delta; ss_1, \text{Tr}) \quad (2.33)$$

が成立する。プレイヤー2についてもまったく同様のことが言える。式(2.32)を変形すると式(2.28)が得られる。以上で証明された。

2.10.2 (しっぺ返し, しっぺ返し)がナッシュ均衡となる一般的条件

2×2 囚人のジレンマゲームを成分ゲームとする無限繰り返しゲーム G^∞ において、(しっぺ返し, しっぺ返し)がナッシュ均衡となる一般的条件は

$$\delta \geq \max\left(\frac{T-R}{T-P}, \frac{T-R}{R-S}\right) \quad (2.34)$$

である。ここで $\max(a, b)$ は a, b のうち大きな方をとるという操作を示している。この命題の証明はやや煩雑であるため、ここではフォローしない。詳しくは岡田(2011, 235-8)を参照されたい。

この条件の数値例を示そう。表2.11を成分ゲームとする無限繰り返しゲームにおける条件は

$$\delta \geq \max\left(\frac{5-3}{5-1}, \frac{5-3}{3-0}\right) = \max(0.5, 0.6\dot{6}) = 0.6\dot{6}$$

である。この例からも分かる通り、しっぺ返し同士がナッシュ均衡となる条件は、トリガー同士がナッシュ均衡となる条件に比べて、同等かそれよりも厳しい条件になっているものの、 δ が十分に1に近ければ(しっぺ返し, しっぺ返し)がナッシュ均衡となる可能性があることを示している。

2.11 アクセルロッドのトーナメント

アメリカの政治学者であるロバート・アクセルロッドは、繰り返し囚人のジレンマゲームを用いて次のようなコンピュータ・シミュレーションを行った。ゲーム理論の専門家を中心として、さまざまな研究者から繰り返し囚人のジレンマゲームの戦略のアイデアを募り、それらの戦略を総当たりで戦わせて、もっとも平均利得が高い戦略

を決定した。2回のトーナメントが実施されたが、2回とももっとも平均利得が高くなったのは「しっぺ返し」だったのである。

この結果は「しっぺ返し」がさまざまな対戦相手との対戦において、そこそこの結果を得ることができる「たくましい」戦略であることを示しているとアクセルロッドは見ている。しっぺ返しの成功の要因としてアクセルロッドは「自分の方から裏切り始めることはなく、相手の裏切りには即座に報復し、心が広く、相手に対して分かりやすい行動」(Axelrod, 1984, 55)であることを挙げている。

ここで、「たくましさ」が、ある戦略をもつプレイヤーが生き残って、次の世代にその戦略を伝える可能性の高さを表していると考えてみると、しっぺ返し戦略の強さは相互協力という社会秩序状態が成立する1つの道筋を示していると思えるだろう。

アクセルロッドのトーナメントについて、より詳細には『つきあい方の科学』(Axelrod, 1984)を参照のこと。

課題 2.4. 日常のコミュニケーションにおいて、しっぺ返しやトリガー戦略は見られるだろうか。仮想例でもいいので、しっぺ返しやトリガー戦略がどのような場面で用いられているか考えてみよう。

第3章

相対的剥奪と不平等

本章では、社会学における古典理論である相対的剥奪論を取り上げる。最初に、相対的剥奪概念について概観し、Boudon-Kosaka モデルを検討する。さらに、相対的剥奪概念が不平等の測定と密接に関わることを確認する。本章全体の参考として盛山(2015, 3章)を参照のこと。

3.1 相対的剥奪

3.1.1 相対的剥奪の発見

まず最初に、古典的な社会科学において相対的剥奪現象がどのように発見されたか確認する。

19世紀のフランスの社会学者アレクシス・ド・トクヴィルは、当時のアメリカ社会の観察から以下のような知見を述べている。

一国の人民の社会状態と政治の基本構造がどれほど民主的であろうとも、市民の誰もが自分の負ける相手を身近にいつも何人か見出すと考えねばならず、彼は執拗にこの点に目を向けるだろうと予想される。不平等が社会の共通の法であるとき、最大の不平等も人の目に入らない。すべてがほぼ標準化するとき、最小の不平等に人は傷つく。平等が大きくなればなるほど、常に、平等の欲求が一層飽くことなき欲求になるのはこのためである (Tocqueville, 1840, 上, 237-8)。

また、フランス革命について以下のように述べる。

なお、のちにこの革命の主要な発生源となるフランスの地域は、まさに発展が最も著しい地域である。……このような情景には驚きを禁じえないが、歴史はこれと同様の光景で満ち満ちている (Tocqueville, 1856, 361-2)。

時代は下って、サミュエル・スタウファーらは、第二次世界大戦中のアメリカ従軍者に対する大規模調査を実施し、その成果を戦後 *The American Soldier* にまとめた (Stouffer et al., 1949)。そのなかで、兵士の昇進に対する評価 (満足/不満) のデータから次のような特徴を指摘している (図 3.1)。

「相対的に昇進機会の少ない部隊には、昇進機会の大きい部隊よりも昇進機会について好意的に評価する人たちの割合が多い」 (Vol. 1: 257)

スタウファーらは、このような兵士のパラドキシカルな態度を「相対的剥奪」という概念で説明しようとしている。

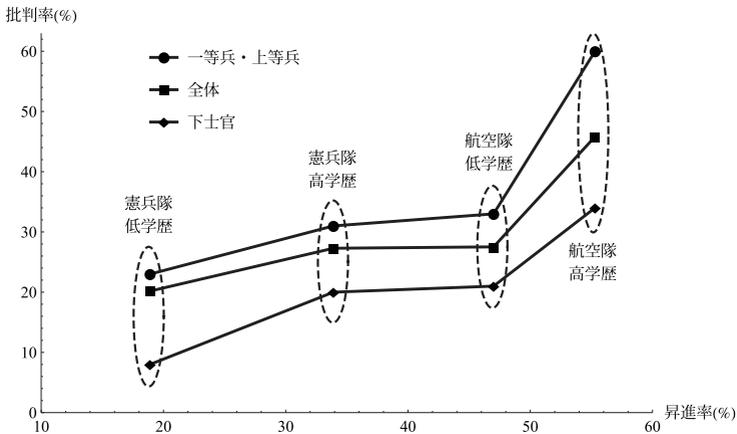


図 3.1 昇進率と剥奪率の関係¹

*1 ここで、剥奪率は「能力のある兵士は軍隊での昇進機会が大きいとあなたは思いますか」に対して、「大きい」、「そこそこ」、「どちらとも」、「あまり/まったくない」と答えたもののうち「あまり/まったくない」の割合のことである。

課題 3.1. トクヴィルとスタウファーが観察した事例に共通するメカニズムとはどのようなものだろうか？ まずは自由に考えてみよう。

3.1.2 相対的剥奪の概念

スタウファーらは明確な定義を与えなかったが、大まかに言えば相対的剥奪 (relative deprivation) とは、「絶対的基準に基づくものではなく、他者との比較に基づく相対的な基準によって生じる不満や何かが奪われているという思い」のことを指す。

その後、Merton (1957) によって *The American Soldier* における知見がまとめられ、比較の対象となる集団としての準拠集団 (reference group) との関連で相対的剥奪概念が整理された。

さらに、Runciman (1966) は個人についての相対的剥奪の条件を定式化した。

■Runciman (1966) 条件

1. 個人 A は X をもっておらず、
2. A は、過去や将来の自己像を含む現在の自分以外の誰かが X をもっていると (本当に持っているかどうかにかかわらず) 見なしており、
3. A は X を欲しいと思っており、
4. A は X を持つことが可能 (feasible) であると思っている

とき、個人 A は X について相対的に剥奪されるという。ここで X の所有には負の財を持たないことも含む。

3.2 Boudon-Kosaka モデル

3.2.1 モデルの公理

相対的剥奪概念が提起する 1 つのパズルは「なぜ、客観的な状況が恵まれている集団ほど不満を感じる人が多くなるのか？」である。これを数理モデルで考えよう。ここでは、Boudon (1982), Kosaka (1986) によるモデルの簡易版を紹介する。

ここで、集団における成功割合を

$$\gamma = \frac{n}{N} \quad (3.1)$$

集団における投資者割合を

$$p = \frac{x}{N} \quad (3.2)$$

と定義する。われわれの第一の関心は、社会において相対的剥奪を感じる人の割合である。このゲームにおいて、相対的剥奪を感じるのは、「投資して失敗した人」として考えることができる。というのも、そのプレイヤーは

1. 成功利得 B を得られず、
2. 自分以外の成功者がいることを知っており、
3. 当然、 B が欲しかったからわざわざ投資したわけであり、
4. 投資したのだから B を得る資格があると感じている、

と考えられ Runciman 条件に合致するからである。集団において相対的剥奪を感じる人の割合は

$$S = p \left(1 - \frac{n}{x}\right) = p \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) = p - \gamma \quad (3.3)$$

で与えられる。成功割合 γ と相対的剥奪割合 S との関係がパズルを解くカギである。

3.2.2 Boudon-Kosaka モデルにおけるナッシュ均衡

Boudon-Kosaka モデルは一種のゲーム状況である。では、公理 4 のプレイヤーの合理性を前提としたときにどのような結果に落ち着くのであろうか*1。

■期待純益 集団の中の p の割合のプレイヤーが投資をしているとする。このときある投資プレイヤーの期待純益を $I(p)$ で表す。

*1 ここでの議論は、Boudon-Kosaka モデルを N 人チキンゲームとして解釈するという武藤 (2009) のアイデアを参考にした

$$\begin{aligned}
 I(p) &= (B - C) \frac{\gamma}{p} - C \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) \\
 &= B \frac{\gamma}{p} - C
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

同様に、 p の割合のプレーヤーが投資をしているとき、ある撤退プレーヤーの期待純益を $W(p)$ で表す。

$$W(p) = 0 \tag{3.5}$$

■撤退中のプレーヤーの意志決定 集団の中の p の割合のプレーヤーが投資をしているとする。このとき、撤退しているプレーヤーにとって

$$W(p) < I(p + 1/N) \tag{3.6}$$

が成り立つのであれば、そのプレーヤーは投資に参加しようとする。

$$\begin{aligned}
 W(p) < I(p + 1/N) &\iff 0 < B \frac{\gamma}{p + 1/N} - C \\
 &\iff p < \frac{B}{C} \gamma - \frac{1}{N}
 \end{aligned}$$

であるので、 p は $(B/C)\gamma - 1/N$ まで、投資参加者が次々と増えることによって上昇する。

■投資中のプレーヤーの意志決定 集団の中の p の割合のプレーヤーが投資をしているとする。このとき、投資しているプレーヤーにとって

$$W(p - 1/N) > I(p) \tag{3.7}$$

が成り立つのであれば、そのプレーヤーは投資から降りて撤退しようとする。

$$\begin{aligned}
 W(p - 1/N) > I(p) &\iff 0 > B \frac{\gamma}{p} - C \\
 &\iff p > \frac{B}{C} \gamma
 \end{aligned}$$

であるので、 p は $(B/C)\gamma$ まで、投資参加者が次々と撤退することによって減少する。

■ナッシュ均衡 相対的剥奪モデルをゲームと見なしたとき、戦略の組合せは p によって過不足なく表現できる。いま利得関数はすべてのプレーヤーで同じであるので、ある戦略の組合せ p^* がナッシュ均衡であるとは、

$$W(p^*) \geq I(p^* + 1/N) \quad (3.8)$$

$$I(p^*) \geq W(p^* - 1/N) \quad (3.9)$$

が同時に成り立つことである。

条件 (3.8) より、

$$\begin{aligned} W(p^*) \geq I(p^* + 1/N) &\iff 0 \geq B \frac{\gamma}{p^* + 1/N} - C \\ &\iff p^* \geq \frac{B}{C} \gamma - \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (3.10)$$

また、条件 (3.9) より、

$$\begin{aligned} I(p^*) \geq W(p^* - 1/N) &\iff B \frac{\gamma}{p^*} - C \geq 0 \\ &\iff \frac{B}{C} \gamma \geq p^* \end{aligned} \quad (3.11)$$

結局、不等式 (3.10), (3.11) より

$$\frac{B}{C} \gamma - \frac{1}{N} \leq p^* \leq \frac{B}{C} \gamma \quad (3.12)$$

がナッシュ均衡の条件である。

ところで、 $N \rightarrow \infty$ のとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p^* = \frac{B}{C} \gamma \quad (3.13)$$

である。つまり、集団の人数が多くなればなるほど、 p^* は $(B/C)\gamma$ に近づく。以下、近似的に $p^* = (B/C)\gamma$ をナッシュ均衡の条件と見なすことにする。ところで、 $C/B < \gamma \leq 1$ となるときは、 $p^* > 1$ となってしまうが、定義上投資割合 p は 1 以上にはなり得ないので、結局

$$p^* = \begin{cases} \frac{B}{C} \gamma & (0 \leq \gamma \leq C/B) \\ 1 & (C/B < \gamma \leq 1) \end{cases} \quad (3.14)$$

がナッシュ均衡時の投資者割合である。

3.2.3 ナッシュ均衡における剥奪割合

式 (3.14) を、剥奪割合の定義式 (3.3) に代入すると、ナッシュ均衡時における剥奪割合 S^* は、

$$S^* = \begin{cases} \left(\frac{B}{C} - 1\right)\gamma & (0 \leq \gamma \leq C/B) \\ 1 - \gamma & (C/B < \gamma \leq 1) \end{cases} \quad (3.15)$$

となる。ここで、 B/C は「ベネフィット・コスト比」(B/C 比)といわれる「投資のうまみ」を示す指標である。 B/C 比が大きければ大きいほど、投資が当たったときの純利益も大きくなる。つまり、より射幸的な投資ということになる。

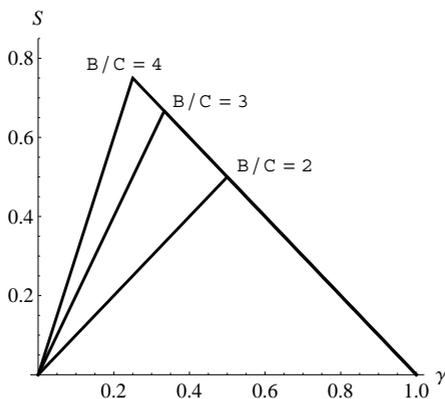


図 3.3 成功割合 γ に対する剥奪割合 S の挙動

図 3.3 は、 B/C 比を変えたときの成功割合 γ に対する剥奪割合 S の挙動を示している。この結果より以下のようなインプリケーションが得られる。

1. $\gamma < C/B$ のとき、成功割合 γ の上昇に伴い剥奪割合 S は増加する。つまり、客観的に恵まれている集団において逆に剥奪を感じる人が増える、という逆説が表現された。

2. 一方、 $\gamma > C/B$ のとき、成功割合 γ の上昇に伴い剥奪割合 S は減少する。高い γ の場合剥奪割合がどうなるかは、*The American Soldier* においては現実には観察されていない。しかし、理論的には減少することを予想している。
3. B/C 比が大きければ大きいほど、剥奪割合 S の飽和点は早くやってくる。また、 $\gamma < C/B$ において、 B/C 比が大きければ大きいほど、同じ γ に対する剥奪割合は高くなる。これは、「うまい投資話」により多くの人が引き寄せられる結果、失敗者が多くなり結果として剥奪割合が高くなることに対応している。

3.2.4 Boudon-Kosaka モデル以降

Boudon-Kosaka モデル以降も、応用発展モデルとしていろいろなモデルが提案されている。例えば、Ishida (2012b) は Boudon-Kosaka モデルを進化ゲームにおけるレプリケーターダイナミクスの枠組みに置き換えて分析している。また、浜田 (2007) は、Boudon-Kosaka モデルをコアモデルとして、繰り返し投資ゲームによる所得分布の説明モデルや、繰り返し投資ゲームにおける公正評価モデルなどさまざまなモデルを展開している。

課題 3.2. Boudon-Kosaka モデルによって、トクヴィルのアメリカ社会の観察やスタウファアの *The American Soldier* の事例はどのように説明できるだろうか。自分の言葉でまとめてみよう。

3.3 ジニ係数と相対的剥奪

本節では、相対的剥奪という人びとの社会心理的機制と、不平等という社会状態の評価が密接に関連することを示したイツハキの議論を紹介する (Yitzhaki, 1979)。そのために、まずは所得の不平等分配状態を視覚的に把握するための手法であるローレンツ曲線を導入し、次に、ローレンツ曲線の評価の指数として、ジニ係数を導入する。最後に、個々人の相対的剥奪の集積が（絶対）ジニ係数と対応することを述べる。なお、本節の議論は、連続所得分布を仮定した形で、石田 (2015) においてより詳細に展開されている。

3.3.1 ローレンツ曲線

まず、具体例から考えよう。いま、集団に4人がいて、それぞれ次のような所得を得ているとしよう。

$$\mathbf{y} = (100, 200, 300, 400) \quad (3.16)$$

このとき、この集団の収入の合計は1000、平均は250である。

この集団において、所得分配がいかに不平等かを評価したい。そのために、累積人口シェアと累積所得シェアとの対応をローレンツ曲線で描き、それを評価する。

まず、所得を昇順に並べる。 \mathbf{y} はすでに並んでいる。次に、ある所得順位までの下位集団が全体の何%なのかを評価する。例えば、所得300までの下位集団は全体の3/4なので、全体の75%である。これを各所得順位で評価したものを、累積人口シェア (cumulative population share) として \mathbf{p} で表すことにする。原点0を含めて、

$$\mathbf{p} = \left(\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \right) = (0, 0.25, 0.5, 0.75, 1) \quad (3.17)$$

である。

さて次に、累積人口シェアに対応して、それぞれの下位集団の所得の合計が集団全体の何%になるかを評価する。これを累積所得シェア (cumulative income share) として、 ϕ で表す。原点0を含めて、

$$\phi = \left(\frac{0}{1000}, \frac{100}{1000}, \frac{300}{1000}, \frac{600}{1000}, \frac{1000}{1000} \right) = (0, 0.1, 0.3, 0.6, 1) \quad (3.18)$$

である。

この、 (\mathbf{p}, ϕ) のグラフをローレンツ曲線 (Lorenz curve) という (図3.4)。

もし、集団の全員が同じ所得 y を得ていたとすると、

$$\phi = \left(\frac{0 \cdot y}{4 \cdot y}, \frac{1 \cdot y}{4 \cdot y}, \frac{2 \cdot y}{4 \cdot y}, \frac{3 \cdot y}{4 \cdot y}, \frac{4 \cdot y}{4 \cdot y} \right) = \mathbf{p} \quad (3.19)$$

なので、ローレンツ曲線は $(0, 0)$ から $(1, 1)$ への対角線となる。これを完全平等線ともいう。この完全平等線から、実際のローレンツ曲線が離れれば離れるほど、その集団の所得分配は不平等であると評価できる。

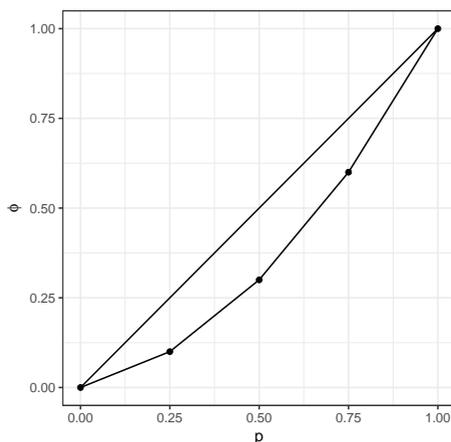


図 3.4 ローレンツ曲線の例

例えば,

$$z = (100, 200, 300, 1400) \quad (3.20)$$

という別の分配 z と先の y をローレンツ曲線において比較すると、図 3.5 のようになるので*2、 z の方が y よりも不平等であると評価できる。

3.3.2 ジニ係数

さらに厳密な比較が可能になるように、完全平等線からローレンツ曲線の偏差を指数として評価したい。このとき、どのように測ればよいか。一つの自然な考え方として、「完全平等線とローレンツ曲線の間の面積」を測ることが考えられる(図 3.6)。この範囲の面積は、「完全平等線の下での面積」(1/2) から「ローレンツ曲線の下での面積」(L と表記) を引くことで得られる(図 3.7)。さらに、指数が 0 から 1 の範囲をとるようにするために、「完全平等線の下での面積」と「ローレンツ曲線と完全平等線との間の面積」との比をとる。これがジニ係数 (Gini coefficient) であり、 G で表す。

*2 自分で書いて確認してみよう。

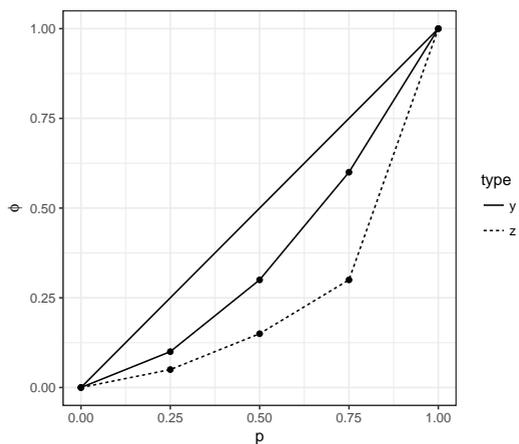


図 3.5 ローレンツ曲線の比較の例

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\text{完全平等線とローレンツ曲線の間の面積}}{\text{完全平等線の下面積}} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - L\right) / \frac{1}{2} = 1 - 2L \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

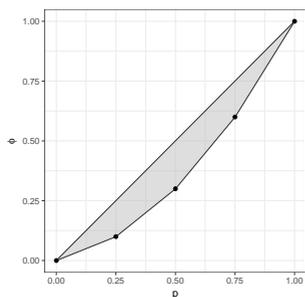


図 3.6 完全平等線とローレンツ曲線の間

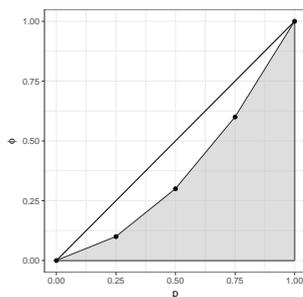


図 3.7 ローレンツ曲線の下

では、 \mathbf{y} における L を計算してみると、

$$\begin{aligned} L &= \frac{(\frac{1}{4} - \frac{0}{4})(\frac{100}{1000} + \frac{0}{1000})}{2} + \frac{(\frac{2}{4} - \frac{1}{4})(\frac{300}{1000} + \frac{100}{1000})}{2} \\ &\quad + \frac{(\frac{3}{4} - \frac{2}{4})(\frac{600}{1000} + \frac{300}{1000})}{2} + \frac{(\frac{4}{4} - \frac{3}{4})(\frac{1000}{1000} + \frac{600}{1000})}{2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 1000} (100 + 300 + 600 + 1000 + 100 + 300 + 600) = 0.375 \quad (3.22) \end{aligned}$$

となる。ゆえに、ジニ係数は $G = 1 - 2 \cdot 0.375 = 0.25$ となる。ちなみに、 \mathbf{z} については、 $G = 0.5$ となる。

課題 3.3. \mathbf{z} のローレンツ曲線とジニ係数を計算して確かめてみよう。

3.3.3 ジニ係数の一般的な定義【Advanced】

次に、一般的な離散所得ベクトル

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \quad (3.23)$$

についてのジニ係数の定義を導入する*3。ここで、平均所得を

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.24)$$

と定義する。このとき、累積人口シェアは

$$\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_k, \dots, p_n) = \left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, 1 \right), \quad (3.25)$$

累積所得シェアは

$$\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k, \dots, \phi_n) = \left(0, \frac{\sum_{i=1}^1 y_i}{n\mu}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{n\mu}, \dots, 1 \right), \quad (3.26)$$

となる。

*3 連続所得分布のジニ係数については、石田 (2015) を参照。

ここから、ローレンツ曲線の下での面積 L は

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (p_k - p_{k-1})(\phi_k + \phi_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (\phi_k + \phi_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2n^2\mu} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^k y_i + \sum_{i=1}^{k-1} y_i \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

となる。ジニ係数は、

$$\begin{aligned} G &= 1 - 2L \\ &= \frac{1}{n^2\mu} \left[n^2\mu - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k y_i - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} y_i \right] \\ &= \frac{1}{n^2\mu} \left[n^2\mu - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k y_i - n^2\mu + \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n y_i \right] \\ &= \frac{1}{n^2\mu} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n y_i - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k y_i \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

である。ここで、 $\sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n y_i$ は、

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & y_n \\ 0 & & & & y_n \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

と定義される $n \times n$ 次元の上三角行列 \mathbf{Y} の要素の総和に他ならない。つまり、

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n y_i = \sum \mathbf{Y} \quad (3.30)$$

である。ただし、 \sum は行列の要素をすべて足す操作を示すこととする*4。同様にし

*4 行列演算として正確に書けば、 $\mathbf{1}_n$ をすべての要素が1の n 次元行ベクトル、 $\mathbf{1}_n^T$ を列ベクトルとすると、 $\sum \mathbf{Y} = \mathbf{1}_n \mathbf{Y} \mathbf{1}_n^T$ ということである。

て, $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k y_i$ は,

$$\mathbf{Y}^s = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_1 & \cdots & y_1 \\ & y_2 & y_2 & \cdots & y_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & y_{n-1} \\ 0 & & & & y_n \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

と定義される $n \times n$ 次元の上三角行列 \mathbf{Y}^s の要素の総和である. つまり,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k y_i = \sum \mathbf{Y}^s \quad (3.32)$$

である. これらの表記を使って, ジニ係数の定義式 (3.28) は,

$$G = \frac{1}{n^2\mu} \sum [\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^s] \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{n^2\mu} \sum \begin{pmatrix} y_1 - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & \cdots & y_n - y_1 \\ & y_2 - y_2 & y_3 - y_2 & \cdots & y_n - y_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & y_n - y_{n-1} \\ 0 & & & & y_n - y_n \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

と変形することができる.

実際の計算上の便宜のために, さらに簡便な式に変形しよう.

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{n^2\mu} \sum [\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^s] \\ &= \frac{1}{n^2\mu} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=k}^n y_i - (n+1-k)y_k \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n^2\mu} \sum_{k=1}^n [ky_k - (n+1-k)y_k] \\ &= \frac{1}{n^2\mu} \left[\sum_{k=1}^n 2ky_k - (n+1)n\mu \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[2 \frac{\sum_{k=1}^n ky_k}{n\mu} - (n+1) \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

式 (3.36) より, R 言語のジニ係数関数を以下のように簡潔に書くことができる.

```

1 Gini <- function(x) {
2   n <- length(x)
3   x <- sort(x)
4   (2*sum(x*1:n)/sum(x)-(n+1))/n }

```

3.3.4 SSM2015 世帯所得のローレンツ曲線とジニ係数

2015年に実施されたSSM調査より、世帯所得についてのローレンツ曲線を描き、ジニ係数を算出する。

図3.8は世帯所得のヒストグラム、図3.9はローレンツ曲線である。

計算の結果、ジニ係数は0.348であった。

3.3.5 相対的剥奪指数

イツハキは相対的剥奪に関する指数を提案し、それがジニ係数と対応関係にあることを示した(Yitzhaki, 1979)。ここでは、ヘイとランバートの導入方法(Hey and Lambert, 1980)にならってイツハキの指数を導入し、ジニ係数との対応を確認する。

最初に、3.1.2節におけるRunciman(1966)による相対的剥奪の定義を思い出そう。ある個人にとって準拠対象となる集団を社会全体であると見なす。さらに、対象Xを自分が持っていない所得とする。そうすると、自分より所得が低い者との比較においては剥奪は生じないが、自分より所得を多く持っている者との比較では所得の差がXとなると考えられる。一般化して言うと、所得 y_k をもつ個人が所得 y_i をもつ個人と所得比較した場合の剥奪の大きさを $D(y_k; y_i)$ とすると、

$$D(y_k; y_i) = \begin{cases} y_i - y_k & y_k < y_i \\ 0 & y_k \geq y_i \end{cases} \quad (3.37)$$

である。

各個人の相対的剥奪の程度を他者との比較による剥奪の平均として定義する。これを個人的相対的剥奪指数(individual relative deprivation index)と呼び、個人 k の相対的剥奪指数を D_k と表すと、

$$D_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D(y_k; y_i)$$

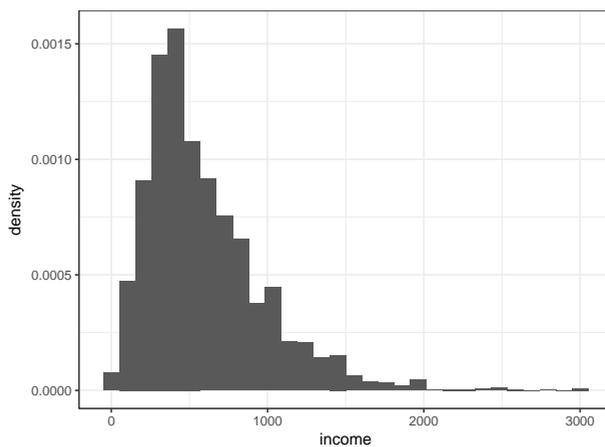


図 3.8 世帯所得のヒストグラム (SSM2015)

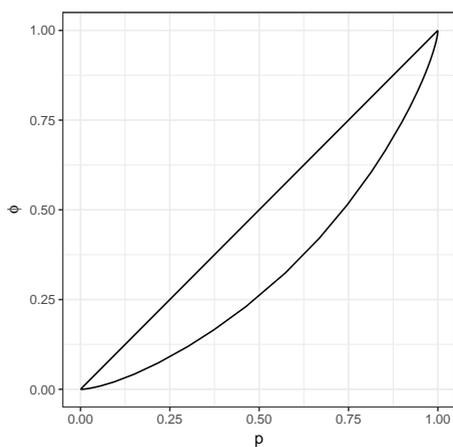


図 3.9 世帯所得のローレンツ曲線 (SSM2015)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=k}^n (y_i - y_k) \\
 &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=k}^n y_i - (n+1-k)y_k \right] \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

となる。

さらに、個人的相対的剥奪指数の値の社会的平均として、社会的相対的剥奪指数 (societal relative deprivation index) を定義し、 D と表すと、ジニ係数の定義式 (3.35) より、

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=k}^n y_i - (n+1-k)y_k \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum [Y - Y^s] = \mu G \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

となる。つまり、社会的相対的剥奪指数は、ジニ係数に平均所得をかけたもの（これを絶対ジニ係数ともいう）である。あるいは、ジニ係数は、社会的相対的剥奪指数を平均所得で割ったものであることがわかる。

3.3.1 節の例 $\mathbf{y} = (100, 200, 300, 400)$ にもどって、相対的剥奪指数を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{(100 - 100) + (200 - 100) + (300 - 100) + (400 - 100)}{4} = 150 \\
 D_2 &= \frac{(200 - 200) + (300 - 200) + (400 - 200)}{4} = 75 \\
 D_3 &= \frac{(300 - 300) + (400 - 300)}{4} = 25 \\
 D_4 &= \frac{(400 - 400)}{4} = 0
 \end{aligned}$$

ゆえに、社会的相対的剥奪指数 D は

$$D = \frac{150 + 75 + 25 + 0}{4} = 62.5 \tag{3.40}$$

である。 $D/\mu = 62.5/250 = 0.25$ となり、ジニ係数と一致することが確認できた。

課題 3.4. $z = (100, 200, 300, 1400)$ の社会的相対的剥奪指数を計算して確かめてみよう.

3.3.6 経済発展と相対的剥奪

ここまで検討してきたように、マクロ・レベルにおける経済状況 (μ) と経済的不平等の状態 (G) と相対的剥奪の社会的平均 (D) の間にはきわめて単純な関係がある。ここで、 D, G, μ を時間 t の関数と見なして、社会的相対的剥奪指数の基本的トレンドを考えよう。時間 t における社会的相対的剥奪指数 $D(t)$ は、

$$D(t) = \mu(t)G(t) \quad (3.41)$$

であり、 t における D の変化の様子は D の導関数

$$D'(t) = \mu'G + \mu G' \quad (3.42)$$

によって知ることができる。

ここで、自然な仮定として $\mu > 0, G > 0$ を仮定する。すると、 D の増減のパターンを表 3.1 のようにまとめることができる*5。

ここでは、社会的相対的剥奪が増加するケースのみを考察しよう。5つのパターンの中でも、特にパラドキシカルだと思われるのが、(1), (2), (3) の「経済が発展するにもかかわらず社会的相対的剥奪が高まる」ケースである。

このような経済発展に伴う剥奪の高まりが社会の不満を高める、という現象は近年経験的にも注目されている。例えば、Brockmann et al. (2008) は 1990 年以降の中国において急激な経済発展にもかかわらず、社会の不満が高まることを指摘し*6、これを「チャイナ・パズル (China puzzle)」と呼んでいる。さらには、Graham (2009) は急激な経済発展に伴う不満の高まりという現象は、様々な社会においてみられることを指摘し、これらを「不幸な発展パラドックス (unhappy growth paradox)」と呼

*5 社会的相対的剥奪が一定 ($D' = 0$) の場合のパターンについても容易に考えることができるが、ここでは増加と減少のみに焦点を当てる。

*6 厳密に言えば、世界価値観調査において計測される生活満足度の社会的平均が 1990 年から 2000 年にかけて減少した。

表 3.1 平均所得とジニ係数の変化による社会的相対的剥奪指数の可能な増減のパターン

社会的 RDが増加する ($D' > 0$)	社会的 RDが減少する ($D' < 0$)
(1) 経済が成長し, 不平等化する ($\mu' > 0, G' > 0$)	(6) 経済が衰退し, 平等化する ($\mu' < 0, G' < 0$)
(2) 経済が成長し, 不平等の程度は変わらない ($\mu' > 0, G' = 0$)	(7) 経済が衰退し, 不平等の程度は変わらない ($\mu' < 0, G' = 0$)
(3) [ある条件下で] 経済が成長し, 平等化する ($\mu'G + \mu G' > 0$ かつ $\mu' > 0, G' < 0$)	(8) [ある条件下で] 経済が衰退し, 不平等化する ($\mu'G + \mu G' < 0$ かつ $\mu' < 0, G' > 0$)
(4) 経済状況は一定で, 不平等化する ($\mu' = 0, G' > 0$)	(9) 経済状況は一定で, 平等化する ($\mu' = 0, G' < 0$)
(5) [ある条件下で] 経済が衰退し, 不平等化する ($\mu'G + \mu G' > 0$ かつ $\mu' < 0, G' > 0$)	(10) [ある条件下で] 経済が成長し, 平等化する ($\mu'G + \mu G' < 0$ かつ $\mu' > 0, G' < 0$)

んでいる。さらに古典的には、デュルケムの『自殺論』における「アノミー的自殺」の指摘もある (Durkheim, 1897)。相対的剥奪指数の枠組みで言えば、このようなパラドックスは論理的に起こりうるのである。

中国の場合には、経済発展に伴って急激な不平等化 (特に都市と農村の格差の拡大) も同時に進展したので、先のパターンでは (1) に当たる。この場合、経済発展と不平等化の相乗効果によって、社会的相対的剥奪は急速に高まる。しかしながら、(2) の不平等度が一定の場合でも経済発展によって社会的相対的剥奪は高まる。さらには、(3) のように経済発展と平等化が同時に進む場合でも、ある条件下では社会的相対的剥奪は高まりうる。具体的には、 $\mu' > 0, G' < 0$ かつ

$$\mu'G + \mu G' > 0 \iff \mu'/\mu > -G'/G \quad (3.43)$$

つまり、平均所得の成長率が、ジニ係数の負の成長率を上回るとき、平等化のスピードよりも経済発展のスピードが速いときに、社会の相対的剥奪は高まるのである*7

*7 このことを特定の条件下で述べたのが、石田 (2015, 89-91) の「経済発展と相対的剥奪の強パラドックス」である。

第4章

階層イメージ・階層帰属意識生成モデル

本章では、Fararo & Kosaka による階層イメージ・階層帰属意識生成モデル (FK モデル) を紹介する。最初に階層イメージ・階層帰属意識の経験的知見を確認し、次に FK モデルを導入し、実際に動かしてみる。

4.1 階層イメージ・階層帰属意識の経験的知見

4.1.1 階層構造のミクロ・マクロリンク

社会階層とは、簡単に言えば、社会経済的地位の不平等分配状態を表す概念であり、階層構造とは、ある時点における階層の組み立てられ方、その骨組みの組み立て方である。

ここで問題にしたいことは、この階層構造がどのようなになっているかということだけでなく*1、階層構造に組み込まれている人びとに、この階層構造がどのように見られているか、つまり人びとの階層認識であり、そこから生じる人びとの階層に関する意識・考えである。

階層認識・意識は、それ自体経験的に興味深い問題であるが、これが階層構造の変動（あるいは不変動）をもたらす結節点になっているという点でも、大変重要な問題である。これを1章でも出てきたミクロ・マクロリンクで説明する（図4.1）。

まず、社会的位置によって、階層に対する認識・意識は異なり、その異なり方には一定の傾向性があることが想定される（マクロ → ミクロ）。次に、階層に対する認識・意識によって人々の（社会的・経済的・政治的）行為・選択が影響を受ける（ミク

*1 これ自体社会階層論の主要なテーマである。

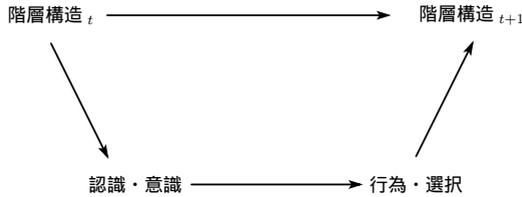


図 4.1 階層構造のマイクロ・マクロリンク

ロ → ミクロ). 最後に、人々の行為・選択の集積によって階層構造が形作られる (ミクロ → マクロ). このように、階層認識・意識は、マイクロ・マクロリンクを介して階層構造が変動する際の重要な一点をなしている。

4.1.2 階層イメージの経験的知見

では、実際に人びとから階層がどのように見えているだろうか. ここでは、古典的な研究からの知見を紹介しよう.

Davis et al. (1941=1988) は、アメリカ南部のコミュニティ研究 *Deep South* において、当時のアメリカ南部都市部の白人社会のなかで、人びとがいかに階層構造を認識しているかを、インタビュー調査から明らかにしている. そのなかで Davis らは、人びとの持つ階層イメージを図として表している (図 4.2).

Fararo (1973, 12 章) は、Davis らが見出した人びとの持つ階層イメージの特徴として次の 2 点を抽出している.

- (1) 階層イメージは、現実の階層を不完全な形で再現する
- (2) 他者の所属階層と自己のそれとの社会的距離が遠ければ遠いほど、階層イメージ上の区別はあいまいになっていく

4.1.3 階層帰属意識の経験的知見

階層帰属意識とは、自分自身がどの階層に属しているかについての考えであり、階層に関連する意識の中でもっとも基本的なものと考えられている。

上の上クラス			上の下クラス	
「旧くからの貴族」	UU		「旧くからの貴族」	
「貴族」だが「旧く」はない	LU		「貴族」だが「旧く」はない	
「上品でそこそこの身分のある人」	UM		「上品でそこそこの身分のある人」	
「善良な人々だが、影響力はない」	LM		「善良な人々だが、影響力はない」	
	UL			
「貧しい白人」	LL		「貧しい白人」	
中の上クラス			中の下クラス	
「上流社会」	UU		「旧家」	
	LU		「上流社会」だが「旧家」ではない	
「上流階級にいてもおかしくない人間」	UM		「旧くからの貴族」(年寄り)	「崩れた貴族」(若い)
「多くのお金はもっていない人々」	LM		「一廉の人間と自分が思っている人々」	
	UL		「われわれ貧乏人」	
	LL		「われわれよりも貧しい人たち」	
「ろくでなしの奴ら」			「ろくでなしの奴ら」	
下の上クラス			下の下クラス	
	UU			
	LU			
「上流社会」あるいは「お金をもっている連中」	UM		「上流社会」あるいは「お金をもっている連中」	
「小金をもっているので、上の人々」	LM		「かなり上の人々」だが「上流社会」ではない	
「貧しいが正直者」	UL		「カネを稼ぐことに一生懸命になっている俗物」	
「やる気のない連中」	LL		「とてもいい人間」	

図 4.2 階層のイメージ (Davis et al., 1941=1988, 65)

日本においては、社会階層と社会移動全国調査（SSM 調査）において、階層帰属意識は基本的な質問項目として、調査が開始された 1955 年以降毎回尋ねられている。具体的な質問項目は次の通りである。

かりに現在の日本社会を 5 つに分けるとすれば、あなた自身はこのどれに入ると思いますか？

上 中の上 中の下 下の上 下の下

課題 4.1. 自分ならこの問いにどう答えるだろうか？ それはなぜだろうか？
自らの意識を言語化してみよう。

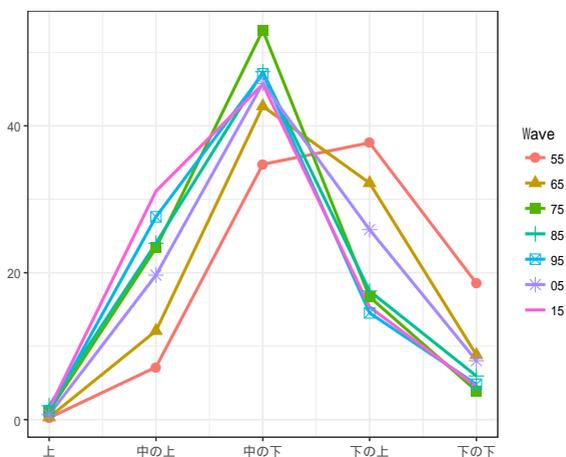


図 4.3 階層帰属意識分布の推移（SSM 調査より）

図 4.3 は、各調査時点の階層帰属意識分布を示している。高度経済成長を達成した 1975 年以降、「中の下」がもっとも多い対称型の分布をしており、またその形状も大きな変化がないことが見える。また、日本だけではなく多くの国で、階層帰属意識の

中意識集中現象が見られる。

4.2 Fararo-Kosaka モデル

ここでモデルを通して考えたいパズルは、次の2点である。なぜ遠くの階層ほど階層イメージ上の区別は曖昧になるのか？そして、なぜどの時代でも一貫した中意識集中現象が起きるのか？

このパズルを解くために、Fararo (1973, 12章), Kosaka and Fararo (1991), Fararo and Kosaka (2003), 高坂 (2006) によるモデル (Fararo-Kosaka モデル, FK モデル) を紹介する。

モデルは次のような公理から構成される*2。

公理 4.1. 時間の定義域 T において、行為者の集合 A 上に多次元の階層構造 S が存在する。 S には、 C_1, C_2, \dots, C_s という s 個の順序づけられた特性が存在し、さらに各々の C_s の要素は順序づけられているとする。つまり、 S における可能な地位の集合はレキシコグラフィカルに順序づけられている。

例えば、 $s = 2$ として、 $C_1 = \{H, M, L\}$ (例えば、職業)、 $C_2 = \{H, M, L\}$ (例えば、学歴) とする。ここで、それぞれの特性は H が一番順位が高く、次いで M 、一番低いのが L である*3。このとき、階層構造 S は上から順に以下のように表される。

HH, HM, HL, MH, MM, ML, LH, LM, LL

C_1, C_2, \dots, C_s を次元とよび、各次元の順序づけられた要素をランクとよぶことにする。以下、各次元のランク数は同一でかつ 2 以上であると仮定して分析を進める*4。次元の数を s 、各特性次元におけるランク数を r とし、このとき S を $s \times r$ 客観階層構造と呼ぶ。

各行為者は、 T 上の各時点 $t = 0, 1, 2, \dots$ において、集合 A の他のメンバーと相互作用するものとする。行為者の S に関するイメージは時間の経過とともに変化するが、 S そのものは T 上において安定している。 $t = 0$ において行為者 α が抱いてい

*2 ここでは、石田 (2003) による簡略版を紹介する

*3 つまり順序関係 $H \succ M \succ L$ が成り立つとする。

*4 この仮定をはずした一般的な分析を行うことも可能である。

る S に関する初期イメージは、 $CI(\alpha)$ である。ここで $CI(\alpha)$ とは S における行為者 α の位置である。

公理 4.2. 行為者 α が他者 β と相互作用を行う場合、次のような手がかり抽出の過程が起こる。

- (1) α ははじめに β の C_1 に関する状態を抽出する
- (2) α は β の C_2 に関する状態を抽出する……

この抽出過程は β の相対的な位置関係が決まるまで続く。もし α の状態と β の状態が同じである場合には、抽出過程は C_s まで続き、「 β は同じ地位」という結論を得る。

公理 4.3. 相互作用が行われた時点で、行為者 α の抱いているイメージは次のようなルールにしたがって修正・変形されてゆく。 $CI(\beta)$ は S のなかの β の位置の抽出部分である。

- (1) $CI(\beta)$ が α の抱いているイメージの中にすでに表現されている場合には、イメージの変化が起こらない。
- (2) $CI(\beta)$ が α の抱いているイメージの中の最高位の階層よりもまだ高いとき、 $CI(\beta)$ が新たにイメージの中での最高位の階層となる。
- (3) $CI(\beta)$ が α の抱いているイメージの中の最下位の階層よりもまだ低いとき、 $CI(\beta)$ が新たにイメージの中での最下位の階層となる。
- (4) $CI(\beta)$ が α の抱いているイメージの中の任意の2つの階層間に位置するとき、 $CI(\beta)$ は両者の間に挿入される。

以上が階層イメージ生成のための公理系である。これらの公理が満たされているとき、各々の客観階層に属する他者との遭遇確率が0でないならば、任意の行為者の抱く階層イメージは、その行為者の客観階層構造上の地位に応じて一意に定まる。つまり、他者との出会いの中で変容していく階層イメージは、最終的には安定均衡状態に至る。このイメージを均衡イメージと呼ぼう。

公理 4.4. 行為者 α は、自身が持つ均衡イメージにおける自らの所属階層の相対的位置に基づき、階層帰属意識を表明する。

4.3 具体例による FK モデルの分析

まずは簡単な具体例でモデルを動かしてみよう。以下の分析では、各客観階層にそれぞれ 1 人の行為者が所属しており、他の階層と必ず相互作用することを仮定する*5。

4.3.1 2 × 2 客観階層構造

2 次元 2 ランクの客観階層構造を仮定した場合の均衡イメージと階層帰属意識分布の予測を示す。

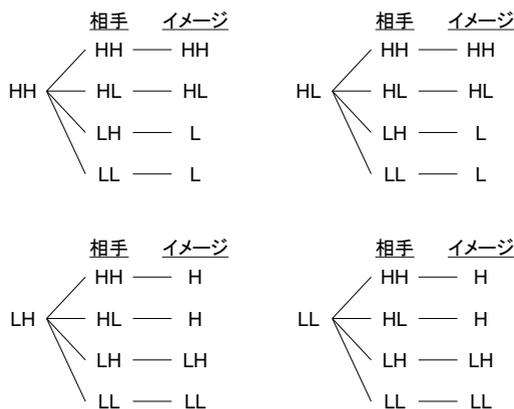


図 4.4 2 次元 2 ランクにおけるイメージ生成過程

図 4.4 を見てみよう。例えば HH に属する行為者が HL に属する他者と出会った場合、第 1 次元は同じ H であるが、第 2 次元は自分より低い L であるので、自らの階層 HH の下に HL というイメージが形成される。次に、LH や LL に属する他者と出会った場合、第 1 次元で自分より低い L なので、それ以上状態の抽出は行われずに

*5 R を用いたプログラムを次の URL に公開しているので興味ある人は自分でやってみよう。
<https://rpubs.com/aishida/FKmodel>

L というイメージが HH, HL の下に形成される。つまり、イメージ上の階層は HH, HL, L の3ランクになる (表 4.1 の H* の列)。

では、LL に属する行為者の場合どうであろうか。HH, HL いずれかに属する他者と出会った場合、第1次元で自分より高いと判断されるので H というイメージが形成される。LH の他者と出会った場合では、第2次元まで比較が行われ自分の階層より高い LH と判断される。結局、形成されるイメージ上の階層は、自らの階層 LL を加えた H, LH, LL の3ランクになる (表 4.1 の L* の列)。

表 4.1 2次元2ランクにおける均衡イメージ

	H*	L*
HH	HH	H
HL	HL	
LH	L	LH
LL		LL

表 4.1 は、2次元2ランクにおける均衡イメージをまとめたものである。H*の列は HH と HL に属する行為者の均衡イメージ、L*は LH と LL に属する行為者の均衡イメージを示す。

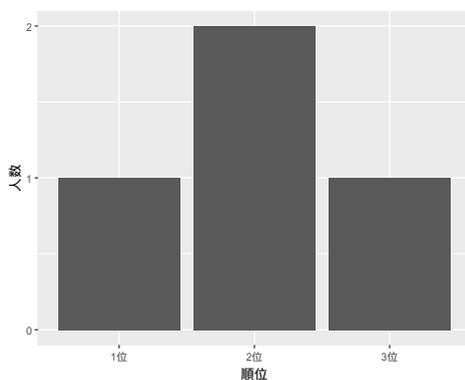


図 4.5 2次元2ランクにおける階層帰属意識分布

図 4.5 は各客観階層に 1 人ずつ行為者がいた場合に、最終的に自分を上から何番目の階層と位置づけるかという階層帰属意識の分布を表している。ここでは、ちょうど真ん中の 2 位と答える人数が多くなっていることに注目しよう。

4.3.2 2 × 3 客観階層構造

2次元3ランクの客観階層構造を仮定した場合の均衡イメージと階層帰属意識分布の予測を示す(図 4.6, 表 4.2, 図 4.7)。

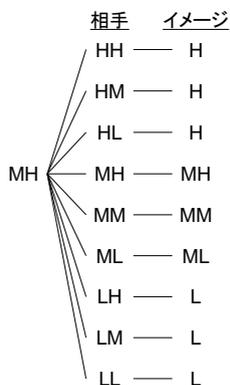


図 4.6 2次元3ランクにおけるイメージ生成過程(階層 MH)

課題 4.2. 図 4.6 は階層 MH のイメージ生成過程であるが、そのほかの階層についてもイメージ生成過程を確認して、表 4.2 のような均衡イメージが得られることを確かめよう。また、一般的に階層イメージと階層帰属意識にどのような傾向性が見られるだろうか。自分の言葉で説明してみよう。

表 4.2 2次元3ランクにおける均衡イメージ

	H*	M*	L*
HH	HH	H	H
HM	HM		
HL	HL		
MH	M	MH	M
MM		MM	
ML		ML	
LH	L	L	LH
LM			LM
LL			LL

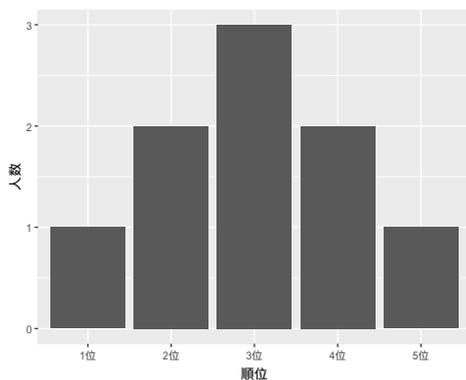


図 4.7 2次元3ランクにおける階層帰属意識分布

4.4 一般的なFKモデルの帰結

FKモデルの公理群から得られる一般的な知見については、高坂(2006)において詳細が検討されている。ここでは、階層帰属意識分布についての結論だけをフォローする。

4.4.1 階層イメージの特性

以下、分析を簡単にするために、各次元のランクを上から

$$r-1, r-2, \dots, 2, 1, 0$$

とラベル付けすることにする。これまで用いていた、 H, M, L という表記を置き換えると、 $r=3$ の場合

$$H = 2, \quad M = 1, \quad L = 0$$

となる。任意の行為者の客観階層構造上の階層プロフィールを一般的に

$$(k_1, k_2, \dots, k_s), \quad 0 \leq k_i \leq r-1 \quad (4.1)$$

と表すことにする。

命題 4.1. 任意の行為者のもつ均衡時の階層イメージのランク数 n は、

$$n = s(r-1) + 1 \quad (4.2)$$

で与えられる。

証明. 第 i 次元において、プロフィール (k_1, k_2, \dots, k_s) をもつ行為者によって、より上位の階層と識別される階層の数は $r-1-k_i$ であり、下位の階層と識別される階層の数は k_i である。ゆえに第 i 次元において識別される階層数は $r-1-k_i+k_i=r-1$ である。このことはすべての次元に当てはまるので、これに s を掛けて、最後に自分自身の所属階層の数を加えると命題を得る。□

命題 4.2. $s \geq 2, r \geq 2$ のとき、

$$r^s > n. \quad (4.3)$$

証明.

$$\begin{aligned}
 r^s &= (1 + (r - 1))^s \\
 &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} (r - 1)^k \\
 &= \sum_{k=1}^s \binom{s}{k} (r - 1)^k + 1 \\
 &> s(r - 1) + 1
 \end{aligned}$$

第1行から第2行への変形は二項定理を用いた。 □

階層イメージ上のランクも同様に、上から下に向かって

$$s(r - 1), s(r - 1) - 1, \dots, 2, 1, 0 \quad (4.4)$$

とラベル付けすることにする。

命題 4.3. 階層プロフィール (k_1, k_2, \dots, k_s) をもつ行為者のもつ均衡時の階層イメージ上のランク ρ は、

$$\rho = \sum_{i=1}^s k_i \quad (4.5)$$

で与えられる。

証明. ランク ρ は、階層イメージ上で自分の所属階層よりも下位とみなされる階層の総数として与えられる。第 i 次元において、下位とイメージされる階層の数は k_i なので、これを次元分だけ足し合わせると命題を得る。 □

4.4.2 階層帰属意識分布の特性

各客観階層にそれぞれ1人の行為者が所属しているとき、階層帰属意識分布は実際どのようになるだろうか。これはモデルの分析上は階層イメージ上のランク ρ に位置する人が何人いるか、という問題に帰着する。

■各次元が 2 ランク まずは、もっとも単純な例として各次元が 2 ランク $C_i = \{1, 0\}$ であるケースを考える。問題は、 $k_i \in \{1, 0\}$ のとき、

$$\rho = \sum_{i=1}^s k_i \quad (4.6)$$

となるような階層プロフィール (k_1, k_2, \dots, k_s) のパターン数である。この場合、とにかく s 個の次元のうち ρ 個の次元で 1 をとればよいので、「 s 個のモノから ρ 個とってくる組合せ」の問題であることが分かる。ゆえに、階層イメージ上のランク ρ に位置する行為者の数は

$$\binom{s}{\rho} = {}_s C_\rho = \frac{s!}{\rho!(s-\rho)!} \quad (4.7)$$

で与えられる。

ここで、二項定理より

$$(1+x)^s = \sum_{\rho=0}^s \binom{s}{\rho} x^\rho \quad (4.8)$$

であるので、階層イメージ上のランク ρ に属する行為者数は、二項定理における x^ρ の係数に一致する。ところで、 $(1+x)^s$ は「パスカルの三角形」の各行の母関数であるので、次元数が大きくなる時の分布の変化はパスカルの三角形の各行を見ればよい。

■各次元が r ランク 先ほどの二項定理を用いた分析からの推論によって、ランクの数が各次元で r のとき x についての単一変数多項式のベキ乗を

$$\left(\sum_{k=0}^{r-1} x^k \right)^s = \sum_{\rho=0}^{s \times (r-1)} f(\rho) x^\rho \quad (4.9)$$

と展開したときの、 x^ρ の係数を定める何らかの関数 $f(\rho)$ が、階層イメージ上のランク ρ に属する行為者数を出力する、と予想される。

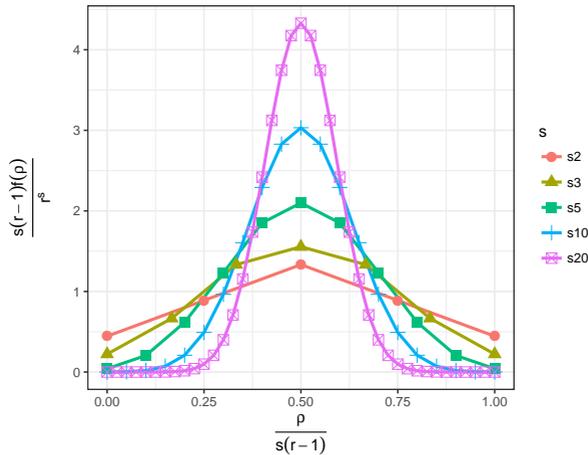
実際、この予想は正しくて

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^{[\rho/r]} (-1)^{k+\rho-rk} \binom{s}{k} \binom{-s}{\rho-rk} \quad (4.10)$$

表 4.3 次元数 s とパスカルの三角形

s	母関数							
0	$(1+x)^0$	1						
1	$(1+x)^1$		1		1			
2	$(1+x)^2$			1	2	1		
3	$(1+x)^3$			1	3	3	1	
4	$(1+x)^4$		1	4	6	4	1	
5	$(1+x)^5$	1	5	10	10	5	1	
6	$(1+x)^6$	1	6	15	20	15	6	1

という関数によって、ランク ρ に属する行為者数を知ることができる。ここで、 $[a]$ は a の整数部分を示す。ここでの数学的操作は、確率論における離散的確率分布の「たたみ込み」に対応している(与謝野, 1996; 高坂・与謝野, 1998)。

図 4.8 階層帰属意識分布 (ランク $r = 3$ のとき)

ここまで各客観階層に 1 人の行為者が配置されている状況を想定してきたが、この

ことは各次元のランクの確率分布を一様分布と仮定していたことと同じことである。このとき、 $f(\rho)/r^s$ は階層イメージ上のランク ρ の出現確率を表している。

図 4.8 は、ランク ρ を 0 から 1 の範囲に収まるように $s(r-1)$ で割ったときの $\rho/[s(r-1)]$ の確率分布を示している*6。この図より、次元が多くなるほど分布は山形になり、正規分布に近づいていくことが分かる。より一般的に、各次元が独立でかつ同一の分布に従っているとき (i.i.d.)、その分布の形を問わず、次元数 s が大きくなれば、階層帰属意識分布は正規分布に近似する、ということが「中心極限定理」という確率分布論の大定理を用いて言える (与謝野, 1996; 高坂・与謝野, 1998)。正確には、

$$\forall i, k_i \sim g(x | \mu, \sigma^2) \text{ i.i.d.} \implies \rho \approx N(s\mu, s\sigma^2), \quad (4.11)$$

ここで、 $N(m, v)$ は平均 m 分散 v の正規分布を、 \approx は「漸近的に従う」ことを示す*7。

さらに、Hamada (2012) はリャプノフ中心極限定理を用いて、各次元が独立非同一であっても (i.d.)、それぞれの次元が有限の平均 μ_i 分散 σ_i^2 をもち、さらに有限の最大ランク数をもっていれば、階層帰属意識分布は正規分布に近似することを証明している。正確には、

$$k_i \sim g(x | \mu_i, \sigma_i^2) \text{ i.d.} \implies \rho \approx N\left(\sum_{i=1}^s \mu_i, \sum_{i=1}^s \sigma_i^2\right), \quad (4.13)$$

FK モデルが想定するメカニズムによって形成される各個人の階層イメージと階層帰属意識が社会的に集積する結果、強固な中意識集中現象が生じる、というのが FK モデルによるパズルへの解答である。

*6 正確にはランク $\rho/\{s(r-1)\}$ の確率 $f(\rho)/r^s$ に $s(r-1)$ をかけて、密度関数のように表したグラフである。

*7 図 4.8 に合わせると以下の通り。

$$\forall i, k_i \sim g(x | \mu, \sigma^2) \text{ i.i.d.} \implies \frac{\rho}{s(r-1)} \approx N\left(\frac{\mu}{r-1}, \frac{\sigma^2}{s(r-1)^2}\right). \quad (4.12)$$

課題 4.3. FK モデルが想定するメカニズムによって、他にどのような社会現象が説明できるだろうか。仮想例でもいいので具体的なアイデアを考えてみよう。

4.5 階層帰属意識分布関数の導出【Advanced】

以下は、数学的には面白いものの、アドバンストな内容なので、興味のある受講者だけがフォローすればよい*8。

各客観階層に1人ずつ行為者が存在するとき、階層イメージのランク ρ に属する行為者数は式 (4.10) によって一意に予測できる。この式を導出しよう。

一般に、任意の無限数列を

$$\langle a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \rangle \quad (4.14)$$

と書くことにする。このとき、数列の k 番目の要素と x^k の係数が一対一対応するような関数 $a(x)$ を考える。すなわち、

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (4.15)$$

このような関数 $a(x)$ は数列 $\langle a_n \rangle$ の母関数と呼ばれる。

もう1つ任意の無限数列を

$$\langle b_n \rangle = \langle b_0, b_1, \dots, b_n, \dots \rangle \quad (4.16)$$

とおく。数列 $\langle b_n \rangle$ の母関数は

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad (4.17)$$

である。

ここで、2つの無限数列から新たな無限数列を作り出す、ある特殊な操作としてた

*8 Ishida (2012a) でも同様の説明をしている。

たたみ込みを導入しよう。数列 $\langle a_n \rangle$ と数列 $\langle b_n \rangle$ のたたみ込みを

$$\begin{aligned} \langle a_n \rangle * \langle b_n \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right\rangle \\ &= \left\langle (a_0 b_0), (a_0 b_1 + a_1 b_0), (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0), \dots, \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \dots \right\rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

と定義する。ところで、母関数 $a(x)$ と $b(x)$ の積を取ると、

$$a(x)b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n \quad (4.19)$$

となるので、数列のたたみ込みと、対応する母関数の積をとるという操作は対応していることが分かる。

より一般に、 s 種類の無限級数 $\langle a_{1n} \rangle, \langle a_{2n} \rangle, \dots, \langle a_{sn} \rangle$ のたたみ込みは

$$\langle a_{1n} \rangle * \langle a_{2n} \rangle * \dots * \langle a_{sn} \rangle = \left\langle \sum_{k_1 + \dots + k_s = n} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{sk_s} \right\rangle \quad (4.20)$$

と定義される。

第 $r-1$ 要素まで 1 をとり、その後 0 をとり続ける特殊な無限数列 U_r を導入する。すなわち、

$$U_r = \langle u_0, u_1, \dots, u_{r-1}, u_r, \dots \rangle \quad (4.21)$$

$$= \langle \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r \text{ 個}}, 0, 0, \dots \rangle \quad (4.22)$$

ただし、

$$u_k = \begin{cases} 1 & (k \leq r-1) \\ 0 & (k > r-1) \end{cases} \quad (4.23)$$

である。また、 U_r の母関数を $U_r(x)$ と記すことにすると、

$$U_r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} x^k \quad (4.24)$$

である。例えば、 U_2 は $U_2 = \langle 1, 1, 0, 0, \dots \rangle$ であり、母関数は $(1+x)$ である。

たたみ込みの定義より、 U_r を s 個たたみ込んだときの ρ ($\rho = 0, 1, 2, \dots$) 番目の要素は

$$\sum_{k_1 + \dots + k_s = \rho} u_{k_1} u_{k_2} \dots u_{k_s} \quad (4.25)$$

となる。少なくとも1つでも $k_i > r-1$ となる場合は、項 $u_{k_1} u_{k_2} \dots u_{k_s}$ がゼロになる。ゆえに、式(4.25)は

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, \quad 0 \leq k_i \leq r-1, \quad \rho = \sum_{i=1}^s k_i \quad (4.26)$$

を満たす (k_1, \dots, k_s) のパターン数を出力することになる。これはFKモデルにおいて、階層イメージ上のランク ρ に属する行為者数に他ならない。

表4.4 U_3 を3個たたみ込んだ結果

k	0	1	2	3	4	5	6	7
U_3	1	1	1	0	0	0	0	0
U_3	1	1	1	0	0	0	0	0
U_3	1	1	1	0	0	0	0	0
$U_3 * U_3 * U_3$	1	3	6	7	6	3	1	0

ここまでの考察で、各客観階層に1人の行為者が属しているときの、 s 次元 r ランクの階層イメージ分布は、数列 U_r の s 個のたたみ込み、すなわち、

$$\underbrace{U_r * U_r * \dots * U_r}_{s \text{ 個}} \quad (4.27)$$

によって一意に与えられることが分かった。次に、この数列を明示化することを考えよう。このとき、数列のたたみ込みは母関数の積に対応する、という知見を用いる。数列 U_r の s 個のたたみ込みに対応するのは、

$$(U_r(x))^s = \left(\sum_{k=0}^{r-1} x^k \right)^s \quad (4.28)$$

という母関数である。これをぐりぐり展開して係数式を求めればよい。

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=0}^{r-1} x^k \right)^s &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{r-1})^s \\
 &= \left(\frac{1-x^r}{1-x} \right)^s \quad (\because \text{初項 } 1, \text{ 等比 } x \text{ の等比数列の和}) \\
 &= (1-x^r)^s (1-x)^{-s} \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} (-1)^k x^{rk} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s}{j} (-1)^j x^j \right) \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

右辺の最後は、左項は（一般化）二項定理から、右項は負の二項定理から導き出される。ここで、

$$a_{rk} = \binom{s}{k} (-1)^k, \quad b_j = \binom{-s}{j} (-1)^j \quad (4.30)$$

とおく。 b_j は負の二項係数とも呼ばれ、

$$b_j = \binom{-s}{j} (-1)^j = \binom{s+j-1}{j} = {}_sH_j \quad (4.31)$$

と変形することができる。ここで、 ${}_sH_j$ は「 s 個のものから重複を許して、 j 個のものをとる組合せの数」を示す。

さて、式 (4.29) から続けよう。

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{rk} x^{rk} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) \quad (4.32)$$

は 2 つの母関数の積の形をしている。式 (4.19) と見比べながら、上式を展開したときの x^ρ の係数がどうなるかを考えよう。 x^ρ の係数となるのは $\rho = rk + j$ を満たす $a_{rk} b_j$ であり、これらをすべてのパターン足し合わせればよい。 $j = \rho - rk$ かつ、

$j \geq 0$ なので, k が動くのは, $0 \leq k \leq [\rho/r]$ の範囲である. ゆえに, x^ρ の係数は

$$\sum_{k=0}^{[\rho/r]} a_{rk} b_{\rho-rk} = \sum_{k=0}^{[\rho/r]} (-1)^{k+\rho-rk} \binom{s}{k} \binom{-s}{\rho-rk} \quad (4.33)$$

$$= \sum_{k=0}^{[\rho/r]} (-1)^k \binom{s}{k} \binom{s+\rho-rk-1}{\rho-rk} \quad (4.34)$$

$$= \sum_{k=0}^{[\rho/r]} (-1)^k \binom{s}{k} \binom{s+\rho-rk-1}{s-1} \quad (4.35)$$

となる. これでようやく, 式 (4.10) が導出できた. 母関数としては,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{rk} x^{rk} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{\rho=0}^{s(r-1)} \left(\sum_{k=0}^{[\rho/r]} a_{rk} b_{\rho-rk} \right) x^\rho \quad (4.36)$$

となる.

たたみ込みを含む, 数列の議論は大変に奥が深い. 数学的に興味が湧いてきた人は結城 (2007) を一読してみるのもいいだろう.

第5章

親族構造のモデル

本章ではホワイトの親族構造の代数モデルを、ブラッドリー&ミーク、1986『社会のなかの数理』(Bradley and Meek, 1986, 4章)の記述をもとに紹介する。

5.1 親族構造

5.1.1 交換の体系としての社会

贈与とは人間の本質的なふるまいであり、人間は贈り物をする動物であるともいえる。

贈与には互酬原理が結びついている。ここで、互酬原理とは、「人から何かを贈られたら同じ価値のもの（あるいはそれ以上のもの）を贈り返さなければならない」とする原理であり、これが規範として働くことによって、贈与から交換に発展する。

文化人類学者のクロード・レヴィ=ストロースは、社会における交換=コミュニケーションの3つの水準を指摘している (Lévi-Strauss, 1958, 324)。

表 5.1 交換の3つの水準

交換されるもの	交換のルール	実現する体系
メッセージ	言語規則	言語体系
財貨・労力	取引規則	経済体系
女性	親族・婚姻規則	親族体系

交換には、大きくいって、贈ってくれた人に返す (pay back) 「限定交換」と、次の人に渡す (pay it forward) 「一般交換」がある。

このように交換が行われることによって、メッセージや財貨、女性を介して人びとがネットワーク化され、社会が立ち上がる。ゆえに、交換を阻害するようなふるまいは文化的に非道徳なものとして非難の対象になる。メッセージの交換を阻害する「無愛想」、財貨の交換を阻害する「吝嗇」、女性の交換を阻害する「近親相姦」がこれにあたる。

課題 5.1. 互酬原理に基づく交換として、具体的にどのような事例が思い浮かぶだろうか。身近な例を考えてみよう。

5.1.2 親族構造

親族構造は、社会的関係と生物学的関係が融合した一種の社会構造であり、そこでは、婚姻関係と親子関係という2つの基本的な関係を制限することで、親族システムを秩序化している。

ここで、ある閉じた「未開」社会において、いくつかのクラン（氏族、共通の祖先を持つと信じられる血縁集団）がある状況を考えてみよう。

このとき、婚姻規則とは、ある男が結婚相手を見つけることのできるクランを定める規則のことである。たとえば、どのようなタイプのイトコ（父方オジの子、父方オバの子、母方オジの子、母方オバの子）と結婚できるかの規則は社会によって異なってくる。イトコ婚は、ある程度閉じた社会において、限られた結婚相手のプールの中で、規則に合うようにうまく相手をマッチングする上で重要な規則となっている。

そして、出自規則とは、ある男の子供が属するクランを定める規則である。

この2つが組み合わさることによって、一般的なタイプの規定婚システムが構成される。

ところで、レヴィ=ストロースは、親族の基本単位は、普通に考えられる父・母・（男）子の3者構造の核家族ではなく、そこに母方オジを加えた4者構造であると主張している（Lévi-Strauss, 1958, 37-61）。この構造には、共通の父をもつ関係、結婚による関係、生んだものと生まれたものの関係という親族関係の基本がすべて含まれており、さらに近親婚の禁止の結果として、女性の給付関係（母方オジ→父）とそれに起因する対立する2つの世代関係（父-子、母方オジ-子）を含んでいるのである。

5.2 ホワイトのモデル

人類学者クロード・レヴィ＝ストロースと数学者アンドレ・ヴェイユは親族構造の代数学的分析を行った (Lévi-Strauss, 1967)*¹. その後, ハリソン・ホワイトはさらに洗練された包括モデルを提案した (White, 1963).

以下では, Bradley and Meek (1986, 4章) に基づいて, 規定婚システムの一般的なモデルのホワイトの公理 (White, 1963, 34–5) を導入する.

公理 5.1. 社会の全構成員は, 相互に排反的な集団に分割される. そのような集団を, クランと呼ぶ. 各人のクランへの所属は, 生涯変わることはない. 以下では, クランの数を n で表す.

公理 5.2. 規則により, あるクランに属する男はある定められた唯一のクランに属する女の中から妻を見出さなければならない. その規則は, 生涯変更されることはない.

公理 5.3. 2つの異なったクランに属する男は, それぞれ異なったクランに属する女と結婚しなければならない.

公理 5.4. ある夫婦の子どもは全員, 1つの同じクランに帰属させられる. 帰属させられるクランは, 夫と妻のクランに応じて一義的に定められている.

公理 5.5. 父親のクランが異なる子どもたちは, 異なるクランに属する.

公理 5.6. 男は彼と同じクランに属する女とは, 決して結婚できない.

公理 5.7. すべての人は, 結婚と出自を通して他のクランに親戚をもっている. つまり社会は, 相互につながりのない集団に分裂してはいない.

公理 5.8. 結婚と出自の絆によって結びつけられている2人が, 同じクランに属するかどうかは, どのクランであっても, かれらの間の関係にのみ依存している.

*¹ フランス語版の初版は1949年.

5.3 ホワイトの公理の行列による表現

5.3.1 公理 5.1–5.5 による表現規則

公理 5.1 より、社会は n 個のクランによって構成される。それぞれのクランを n 次元の単位（行）ベクトル \mathbf{e}^i で表すことにする。また、クランの集合を S とする。このとき集合 S の要素数は $|S| = n$ である。例えば、社会が 4 つのクランからなる場合、それぞれのクランは以下のように表される。

$$\mathbf{e}^1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}^2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{e}^3 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{e}^4 = (0, 0, 0, 1)$$

公理 5.2, 5.3 より、あるクランの男の結婚相手のクランを 1 対 1 対応で定める対応規則が存在する。これを n 行 n 列の順列行列 W で表す。順列行列とは、「各行・各列にそれぞれ 1 を 1 個だけ含み、他の残りの要素がすべて 0 となる行列である*2。例えば、

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.1)$$

である。このような W を定めることによって、任意の $\alpha \in S$ に属する男性の妻の出身クランを知ることができる。このような写像を

$$W(\alpha) = \alpha W \quad (5.2)$$

と定義する。例えば、先の例であれば

$$W(\mathbf{e}^2) = (0, 1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0) = \mathbf{e}^1 \quad (5.3)$$

*2 行数と列数が等しい行列を一般的に正方行列 (square matrix) と呼ぶ。

となるので、2番目のクランに属する男性の妻は1番目のクランであることが分かる。

同様に、出自規則を順列行列 C によって定める。 C によって、任意の $\alpha \in S$ に属する男性の子の所属クランを知ることができる。このような写像を

$$C(\alpha) = \alpha C \quad (5.4)$$

と定義する。順序行列 W, C を右側から掛け合わせることによって（写像を合成することによって）、さまざまな親族関係の対応規則を表現することができる*3。例えば、

$$CCW = C^2W \quad (5.6)$$

は、ある男性の孫の結婚相手のクランを示す対応規則となる。また、対応規則の逆行列を考えることで、関係を逆にたどることもできる。

ここで、単位行列、逆行列をきちんと導入しておこう。単位行列とは対角成分 ii がすべて1であり、それ以外が0となるような正方行列のことである。これを I で表す、つまり、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

正方行列 A について、 $AI = IA = A$ が成立する。

ある正方行列 A の逆行列は

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (5.8)$$

を満たすような正方行列 A^{-1} として定義される。順列行列の場合、行列 A の行と列を入れ替えた転置行列 tA が上記の定義を満たす逆行列となる。このことは行列の積の定義から直ちに言えるので、興味ある受講者は自ら確認して欲しい。ゆえに、

$$W^{-1} = {}^tW, \quad C^{-1} = {}^tC. \quad (5.9)$$

*3 n 行 n 列の正方行列の積は一般に、

$$AB = (a_{ij})(b_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right) \quad (5.5)$$

と定義される。ここで、行列を ij 要素で代表させる表し方をしている。一般に AB と BA は等しいとは限らない。つまり、行列の積は「可換」ではない。

ここで、 W^{-1} は妻から見た夫の所属クランを定めるものであり、 C^{-1} は子から見た父親のクランを指し示す規則となる。例えば、

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

である。

こうして、 W と C 、 W^{-1} と C^{-1} の任意の積によって、さまざまな親族関係を表すことができる。一般的に、 W, C から生成される順列行列を

$$M = M(W, C) \quad (5.11)$$

と表す。具体的には、先の C^2W や $C^{-1}WC$ などである。

5.3.2 公理 5.6–5.8 の数学的表現 【Advanced】

公理 5.6–5.8 を数学的に言い直すと以下ようになる (Fararo, 1973, II, 207–8).

公理 5.6'

$$\forall \alpha \in S, \quad W(\alpha) \neq \alpha \quad (5.12)$$

公理 5.7'

$$\forall \alpha, \beta \in S, \quad \exists M(W, C) \text{ s.t. } M(\alpha) = \beta \quad (5.13)$$

公理 5.8'

$$\exists \alpha \in S, \quad M(\alpha) = \alpha \implies M = I \quad (5.14)$$

ただし、 $M = W$ となる M を除く。

近親婚を禁止した公理 5.6 より、

$$W \neq I \quad (5.15)$$

が直ちに導かれる。公理 5.7, 5.8 は後に述べる群論との関係で重要な役割を果たす。

課題 5.2. 式 (A.2) の婚姻規則と式 (5.10) の出自規則で表される規定婚システムにおいて、エゴのクランと以下の親族のクランとの対応関係を行列で求めよ.

- (1) 父の兄弟の子ども
- (2) 母の姉妹の子ども
- (3) 父の姉妹の子ども
- (4) 母の兄弟の子ども

5.4 (第1) イトコ婚

公理 5.1–5.8 を満たすような親族関係において、どのような「イトコ婚」が許容され、反対に禁忌されるのか。これはインセスト・タブーの問題とも密接に関連する興味深い問題である。

以下では、エゴ（焦点となる個人）を男性であると仮定して、公理のもとでどのようなイトコ婚が許容されるかを検討する。イトコの種類は、エゴから見て父方か母方か、父親あるいは母親とイトコの親であるオジあるいはオバとの関係が平行（同一性）か交差（異なる性）か、によって4種類に分けられる。

5.4.1 父方平行イトコ婚

父の兄弟の娘との結婚。

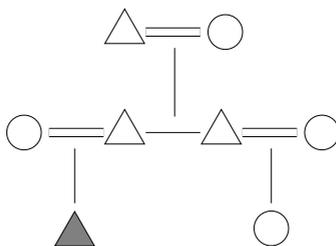


図 5.1 父方平行イトコ婚

エゴから見た父のクランは C^{-1} 、父の兄弟は父と同じクランであり、その子は $C^{-1}C$ によってエゴと関係づけられるクランに属する。ゆえに、

$$C^{-1}C = I = W \quad (5.16)$$

が成立するとき、父方平行イトコ婚は許容される。しかしながら、公理 5.6 より、 $W \neq I$ でなければならないので、公理 5.1–5.8 を満たす規定婚システムにおいては、父方平行イトコ婚は禁止される。

5.4.2 母方平行イトコ婚

母の姉妹の娘との結婚。

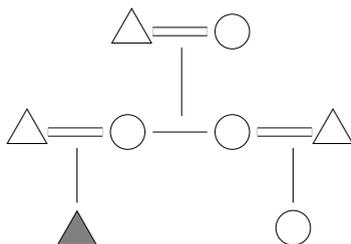


図 5.2 母方平行イトコ婚

エゴから見た母の出身クランは $C^{-1}W$ であり、母の姉妹は母と同じ出身クランであり、母の姉妹の夫は $C^{-1}WW^{-1}$ となるので、結局母の姉妹の娘は、 $C^{-1}WW^{-1}C$ によってエゴと関係づけられるクランに属する。ゆえに、

$$C^{-1}WW^{-1}C = I = W \quad (5.17)$$

が成立するとき、母方平行イトコ婚は許容されるが、公理 5.6 よりこれは許容されない。ゆえに、公理 5.1–5.8 を満たす規定婚システムにおいては、母方平行イトコ婚は禁止される。

5.4.3 母方交差イトコ婚

母親の男きょうだい（兄もしくは弟）の娘との結婚。

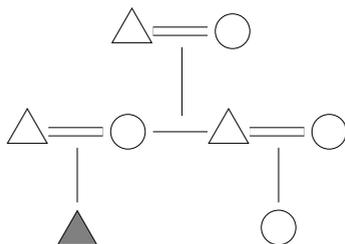


図 5.3 母方交差イトコ婚

エゴから見た母の出身クランは $C^{-1}W$ であり、そのクランに属する父親の子どもは $C^{-1}WC$ に属さなければならない。ゆえに、

$$C^{-1}WC = W \iff WC = CW \quad (5.18)$$

が成立するとき、母方交差イトコ婚は許容される。

5.4.4 父方交差イトコ婚

父親の女きょうだい（姉もしくは妹）の娘との結婚。

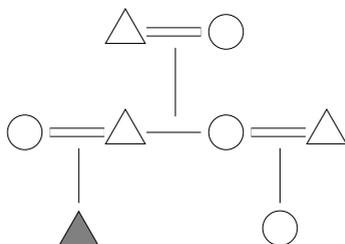


図 5.4 父方交差イトコ婚

エゴから見た父方の叔母の現在のクランは、叔母の夫のクランであるので $C^{-1}W^{-1}$ であり、そのクランに属する父親の子どもは $C^{-1}W^{-1}C$ に属さなければならない。ゆえに、

$$C^{-1}W^{-1}C = W \iff W^{-1}C = CW \quad (5.19)$$

が成立するとき、父方交差イトコ婚は許容される。

5.4.5 双系交差イトコ婚の必要条件

母方交差イトコ婚と父方交差イトコ婚の両方（双系交差イトコ婚）が許容されている社会を考える。このとき、式 (5.18), (5.19) より、

$$\begin{aligned} WC = CW \text{ かつ } W^{-1}C = CW &\implies WC = W^{-1}C \\ &\iff W^2 = I \end{aligned} \quad (5.20)$$

となる。 $W^2 = I$ となるような W は、2つのクラン同士がペアになって妻を交換しあう婚姻規則に他ならない。そして、 $W^2 = I$ となるような W の存在が、双系交差イトコ婚の必要条件となっているのである（必要十分条件ではないことに注意）。

5.4.6 許容されるイトコ婚の種類による社会の分類

White (1963, 42) は、許容されるイトコ婚の種類によって社会類型を行っている。

- I 双系婚： $W^2 = I$ かつ $WC = CW$ 。
- II 母系婚： $W^2 \neq I$ かつ $WC = CW$ 。
- III 父系婚： $W^2 \neq I$ かつ $W^{-1}C = CW$ 。
- IV 対になったクラン： $W^2 = I$ かつ $WC \neq CW$ 。
- V その他： $W^2 \neq I$ かつ $WC \neq CW$ かつ $W^{-1}C \neq CW$ 。

課題 5.3. この規定婚システムにおいて、平行イトコ婚が父方母方にかかわらず禁止されるのはなぜだろうか。言葉で説明してみよう。

5.4.7 交換の2つの向き

Lévi-Strauss (1958, 27章) によれば、2つの交差イトコ婚にも構造的な違いがある。母方交差イトコ婚の場合、父の世代と子の世代の女性の交換の向きは同じであり、父・母・子・母方オジの親族関係の基本パーツを次々とつなげていくことで開放

的な全面交換を実現できる。

一方、父方交差イトコ婚の場合は、父の世代の女性の交換が子の世代では逆転しており、限定的な閉じた交換体系へとつながるものであり、「社会的インセスト」の危険をもつものである。

実際の民族・社会における親族体系は、母方婚と父方婚の2つの方向の対立と結びつきによって様々な形を取るという。

5.5 群としての親族関係【Advanced】

5.5.1 親族関係のタイプ

公理群，特に公理 5.7 と 5.8 から親族関係についていくつかの命題を導出する (White, 1963, 35-9).

命題 5.1. W と C から生成される親族関係を示す順列行列 M について，行列として形式的に異なるタイプはちょうど n 個存在する。

証明. 公理 5.7 より，あるクラン $\alpha = e^i$ について，自分自身のクランを含む n 個の任意のクラン $\beta = e^j$ との関係が結ばれるためには，つまり $M(\alpha) = \beta$ が成立するためには，少なくとも n 種類の M が必要となる。というのも， M は順列行列であり， M の i 行目には 1 がただ 1 つだけ入っている必要があるから，それぞれの j 列目が 1 となるためには，すくなくとも n 種類の M が必要になる。

$$\begin{array}{c} \cdots \quad j \quad \cdots \\ \vdots \\ i \left(\begin{array}{ccc} & & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & & \end{array} \right) \\ \vdots \end{array}$$

こうして得られる n 種類の順列行列の集合を

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

と表すことにする。

次に，ある ij 要素が 1 となる別の種類の順列行列 A_{n+1} が存在するとしよう。このとき， A の中に i 行目が等しくなるような A_k ($1 \leq k \leq n$) が存在する。このと

き, A_k と A_{n+1} は i 行目が等しいので, $A_k(A_{n+1})^{-1}$ の ii 要素は 1 となる. つまり,

$$A_k(A_{n+1})^{-1}(\mathbf{e}^i) = \mathbf{e}^i. \quad (5.21)$$

ゆえに, 公理 5.8 より,

$$A_k(A_{n+1})^{-1} = I \iff A_k = A_{n+1} \quad (5.22)$$

となるので, M のタイプはちょうど n 個となる. \square

命題 5.2. n 種類の親族関係の集合

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

の中に, 単位行列 I は必ず存在する.

証明. A の中に, ある ii 要素が 1 となる順列行列が存在する. このとき, この順列行列は公理 5.8 より, I でなければならない. \square

命題 5.3. n 種類の親族関係の集合 A に属する任意の A_k について, A_k の逆行列が A の中に必ず存在する. すなわち,

$$\forall A_k \in A, \exists (A_k)^{-1} \in A. \quad (5.23)$$

証明. 一般に, ij 要素が 1 であるような $A_k \in A$ に対して, ji 要素が 1 であるような $A_l \in A$ が存在する. このとき, $A_k = A_l$ でもよい.

さて, このとき $A_k A_l$ の ii 要素, そして $A_l A_k$ の jj 要素は 1 となる. ゆえに, 公理 5.8 より,

$$A_k A_l = A_l A_k = I \quad (5.24)$$

となるので, $A_l \in A$ は $A_k \in A$ の逆行列である. \square

5.5.2 親族関係の群論

集合 A はあるクランにあるクランを親族関係として割り当てる規則 (行列) の集合である. これは単なる集合ではなく, 行列の積の演算を通して構造を持つ集合なのである. 一般に, ある演算規則を通して構造を持つような集合を群 (group) という.

定義 5.1. 集合 G が次の条件を満たすとき、群という。

- (1) G の任意の 2 つの元 a, b に対して、何らかの演算 $a * b$ が定義されており、 $a * b$ はまた G の元となる。このとき、 G は演算 $*$ に関して閉じているという。つまり、

$$\forall a, b \in G, \quad a * b \in G.$$

- (2) 結合法則

$$\forall a, b, c \in G, \quad a * (b * c) = (a * b) * c$$

- (3) 単位元と呼ばれる元 $e \in G$ があって、

$$\forall a \in G, \quad a * e = e * a = a.$$

- (4) 任意の $a \in G$ に対して、逆元 $a^{-1} \in G$ が存在して、

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

たとえば、整数全体の集合 \mathbb{Z} は加法 $+$ によって群となる。また、0 を除く有理数全体の集合は乗法 \times によって群をなす。

さて、集合 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ について以下の命題が成立する。

命題 5.4. n 種類の親族関係の集合 A は行列の積に関して、群を形成する。

証明. 命題 5.1 より、任意の M は集合 A のいずれかの要素になるのであった。ゆえに、 A に属する任意の 2 つの行列の積は、やはり集合 A に属する。結合法則は行列の積の性質から直接言える。命題 5.2 より $I \in A$ であるので、単位元の存在が言える。最後に、命題 5.3 より逆元の存在も言えるので、結局命題が成立する。 \square

公理 5.1–5.8 を満たすような親族関係の規則は、数学的にも意味のある構造（群構造）を持つということが言える。

5.6 具体事例の分析

山下 (2006, 58–71) を参考に、レヴィ＝ストロースとアンドレ・ヴェイユの分析においても取り上げられたオーストラリアの 2 つの部族を具体例として検討しよう。

5.6.1 カリエラ族

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.25)$$

このとき,

$$W^2 = C^2 = I \quad (5.26)$$

$$V = WC = CW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

であるので, この規定婚システムにおける親族関係のタイプは

$$\{I(=W^2=C^2), W, C, V(=WC=CW)\} \quad (5.28)$$

の4種類である.

表5.2 カリエラ族における親族関係群の演算表

	<i>I</i>	<i>W</i>	<i>C</i>	<i>V</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>W</i>	<i>C</i>	<i>V</i>
<i>W</i>	<i>W</i>	<i>I</i>	<i>V</i>	<i>C</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>V</i>	<i>I</i>	<i>W</i>
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>C</i>	<i>W</i>	<i>I</i>

$$W^2 = I \quad \text{かつ} \quad WC = CW \quad (5.29)$$

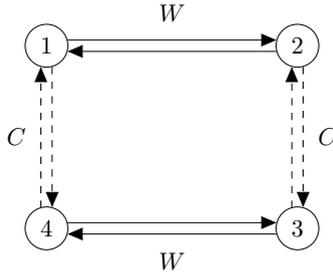


図 5.5 カリエラ族の規定婚システム

が成立するので、この社会は「I 双系婚」である。また、この群構造は「クラインの 4 元群」と同型である。

5.6.2 タラウ族

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.30)$$

このとき、

$$W^4 = C = I \quad (5.31)$$

が成立する。この規定婚システムにおける親族関係のタイプは

$$\{I (= W^4 = C), W, W^2, W^3\} \quad (5.32)$$

の 4 種類である。

$$W^2 \neq I \quad \text{かつ} \quad WC = CW \quad (5.33)$$

表 5.3 タラウ族における親族関係群の演算表

	I	W	W^2	W^3
I	I	W	W^2	W^3
W	W	W^2	W^3	I
W^2	W^2	W^3	I	W
W^3	W^3	I	W	W^2

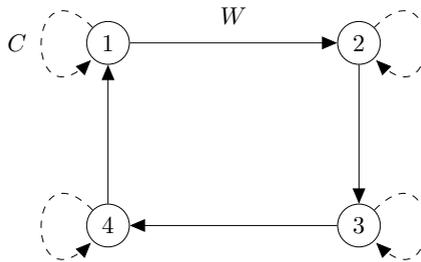


図 5.6 タラウ族の規定婚システム

が成立するので、この社会は「II 母系婚」である。また、この群構造は「位相 4 の巡回群」と同型である。

課題 5.4. 式 (A.2) の婚姻規則と式 (5.10) の出自規則で規定される規定婚システムを分析してみよう (ブラッドリー&ミークの練習問題 4-7 (Bradley and Meek, 1986, 78)).

第6章

二国間軍拡競争モデル

本章では、L. リチャードソンによる二国間（あるいは二陣営間）の軍備拡張競争のモデルを紹介する (Richardson, 1960). このモデルは数学的には微分方程式モデル—さらに精確に言えば線形微分方程式系モデル—であるが、リチャードソンのモデルを紹介する前に、関連するより単純な微分方程式モデルとして、F. ランチェスターによる戦争モデルを紹介する. モデルの紹介に当たっては、佐藤 (1984, 1987) を主に参考にした. 佐藤は、これらのモデルのほかにも、さまざまな微分方程式モデルを紹介しながら、微分方程式の数学的側面についても詳細に説明している. リチャードソン・モデルの簡便な分析法については高坂 (1978) を参考にした.

6.1 戦争モデル (1) 弓矢の戦

6.1.1 微分方程式系の定式化

A 軍と B 軍, 2 つの軍による戦争を考える. 近代以前の古典的な戦争においては, 個々の戦闘員は一騎打ちによって戦っていた. そこで, 仮に両軍とも各戦闘員の戦闘能力はすべて等しいとすると, 勝敗に影響するのは, 戦闘員の数とそれぞれの軍の武器の性能であろう. モデル化に際して以下のノーテーションを導入する.

- t : 戦闘開始後の経過時間. 戦闘開始時間を 0 とする.
- $x(t)$: t 時点における A 軍の戦闘員数. 単に x とも表す. $x \geq 0$.
- $y(t)$: t 時点における B 軍の戦闘員数. 単に y とも表す. $y \geq 0$.
- α : A 軍の武器性能.
- β : B 軍の武器性能.

さらに、 t から $t + \Delta t$ まで時間が経過したときの、両軍の戦闘員数 x, y の変化を

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) \quad (6.1)$$

によって表す。このとき、自軍の戦闘員数の減少数は、敵軍の武器性能に比例すると考える。すなわち、

$$\Delta x = -\beta \Delta t, \quad \Delta y = -\alpha \Delta t \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (6.2)$$

これを両辺 Δt で割ると、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\beta, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\alpha \quad (6.3)$$

を得る。 x, y が時間 t の連続関数で、 t について微分可能であるとする。すると、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、以下のような微分方程式系を得る。

$$\frac{dx}{dt} = -\beta, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (6.4)$$

6.1.2 微分方程式について

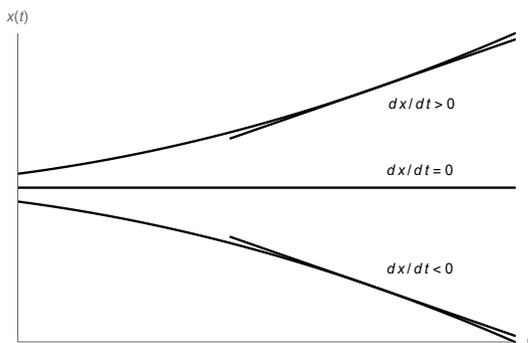
ここで、ごくごく簡単に微分方程式一般について、その基本的な考え方を確認しておこう。

微分方程式 (differential equation) とは、時間 t を変数とする関数 (例えば、 $x(t)$) と、その導関数 (例えば、 dx/dt であるが、さらに高階の導関数を含む方程式もあり得る) とを含む方程式のことである。時間 t を変数とする複数の関数についての微分方程式の組を、微分方程式系 (system of differential equations) という。微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \quad (6.5)$$

は、時間 t における $x(t)$ の瞬間的な変化率を表している。ゆえに、 $x(t)$ の増減については dx/dt を見ればよい。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} \\ t=t_a \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 0 : t_a \text{ において増加} \\ = 0 : t_a \text{ において不変} \\ < 0 : t_a \text{ において減少} \end{array}$$

図 6.1 微分方程式 dx/dt と関数 $x(t)$ の増減の関係

さて、微分方程式 (6.5) をもとに $x(t)$ の式を見出すことを、微分方程式を解くといひ、その式を微分方程式の解 (solution) (一般解) という。解が見つければ、時間 t の変動に伴って、 $x(t)$ がどのように動くかが明示的に分かる。このとき、特に初期時間を t_0 として、

$$x(t_0) = x_0 \quad (6.6)$$

が成立するとする。これを微分方程式の初期条件 (initial condition) といひ、この初期条件を満たす微分方程式の解の特別な形 (特殊解) を見つけることを、初期値問題 (initial value problem) という。

ゆえに、微分方程式を解く、とは微分方程式で表される局所的な x の変動から、 x の時間の経過による大局的な変動を見出すことを意味する。

6.1.3 微分方程式系の解

先の微分方程式系 (6.4) の解を求めよう。 x についての微分方程式について、両辺を t で積分すると、

$$\int \frac{dx}{dt} dt = - \int \beta dt \quad (6.7)$$

となる。左辺は置換積分法*1より、

$$\int dx = - \int \beta dt \quad (6.9)$$

となるので、結局

$$x(t) = -\beta t + c_1 \quad (6.10)$$

を得る。ここで、 c_1 は積分定数である。 y についても同様にして解くと、微分方程式系の解として

$$x(t) = -\beta t + c_1, \quad y(t) = -\alpha t + c_2 \quad (6.11)$$

を得る。

さて、ここで初期条件を

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (6.12)$$

とおく。式(6.11)において、 $t = 0$ とおくと $c_1 = x_0$, $c_2 = y_0$ を得る。ゆえに、初期条件を満たす解は

$$x(t) = -\beta t + x_0, \quad y(t) = -\alpha t + y_0 \quad (6.13)$$

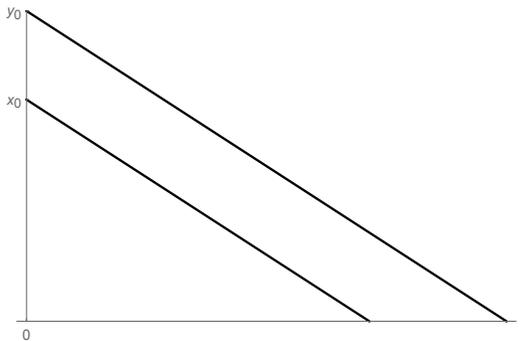
となる。この式から直ちに分かるように、それぞれの戦闘員数は時間の経過に伴って線形に減少する。また、初期戦闘員数が少なければそれだけ早く全滅すること、相手の武器性能が高ければそれだけ自軍の減少速度が速いことがわかる(図6.2)。

6.1.4 二軍間の相互作用

先ほどは、 x, y それぞれの解を求めたが、この解を用いて時間 t が動いたときの x と y の関係を明示化することができる。

*1

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt. \quad (6.8)$$

図 6.2 解 $x(t), y(t)$ のグラフ ($\alpha = \beta$)

式 (6.13) から t を消去すると,

$$\frac{y_0 - y(t)}{x_0 - x(t)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (6.14)$$

を得る. ここで,

$$E = \frac{\alpha}{\beta} \quad (6.15)$$

とし, E を交換比と呼ぶ. これは, A 軍と B 軍の武器性能の違いを表す定数である. $E > 1$ のとき A 軍の武器性能の方が優れ, $E < 1$ のとき B 軍の武器性能の方が優れている. $E = 1$ のとき両軍の武器性能はちょうど同じである. 式 (6.14), (6.15) をまとめると,

$$y(t) = Ex(t) + y_0 - Ex_0 \quad (6.16)$$

を得る. E がある値に決まっているとき, 初期条件 (x_0, y_0) を定めると, その後の時間経過 t に伴う x と y の関係が x - y 平面上の曲線として一意的に定まる. このような曲線を解軌道 (trajectory of the solution) といい, 解軌道の描かれる平面を相平面 (phase plane) という (図 6.3, 6.4, 6.5).

例えば, $E = 1$ の場合 (図 6.3), つまり両軍の武器性能が同じ場合, 式 (6.16) より,

$$y(t) = x(t) + y_0 - x_0 \quad (6.17)$$

であり、さらに初期値も等しい場合は $y(t) = x(t)$ であり、戦力が等しいままお互いの兵力が 0 になるまで戦闘が続く。初期値が異なる場合、例えば $y_0 - x_0 > 0$ の場合、ある t^* 時点で A 軍が全滅したとき、つまり $x(t^*) = 0$ のとき、 $y(t^*) = y_0 - x_0$ となり、B 軍は初期戦力の差分だけ戦力を保持する。

図 6.4 は A 軍の武器性能が B 軍の 2 倍 ($E = 2$) であるケースであり、図 6.5 は、逆に B 軍の武器性能が A 軍の 2 倍 ($E = 1/2$) であるケースである。

課題 6.1. 弓矢の戦の戦争のモデルからどのような教訓を引き出すことができるか。軍参謀になったと仮定して考えてみよう。

6.2 戦争のモデル (2) 近代戦

6.2.1 微分方程式モデルの定式化

弓矢の戦いは大変単純なものであった。一方、軽・重火器を使用する近代戦においては、戦闘は一对一ではなく集団的に行われるので、規模の効果が生まれる。つまり、戦場により多くの戦力を集中的に配置した方が有利に戦闘を進めることができる。例えば、近代以前の戦闘では超人的な強さの戦士一人が無双することも可能であったが、近代戦においてはたとえ一騎当千の武将が単身敵陣に乗り込んでも、機関砲の前に蜂の巣にされる。このようなことを念頭に置きつつ、近代戦の微分方程式モデルを定式化しよう。

近代戦においては、自軍の戦闘員数の減少数は、敵軍の武器性能とともに敵軍の戦闘員数に比例すると考える。すなわち、

$$\Delta x = -\beta y \Delta t, \quad \Delta y = -\alpha x \Delta t \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (6.18)$$

これを両辺 Δt で割ると、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\beta y, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\alpha x \quad (6.19)$$

を得る。 x, y が時間 t の連続関数で、 t について微分可能であるとする。すると、 Δt

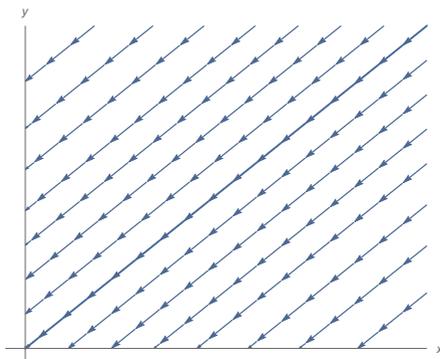


図 6.3 弓矢の戦いの解軌道 ($E = 1$)

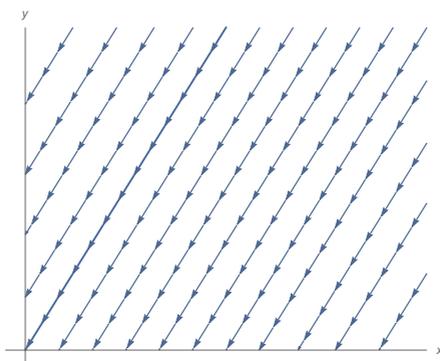


図 6.4 弓矢の戦いの解軌道 ($E = 2$)

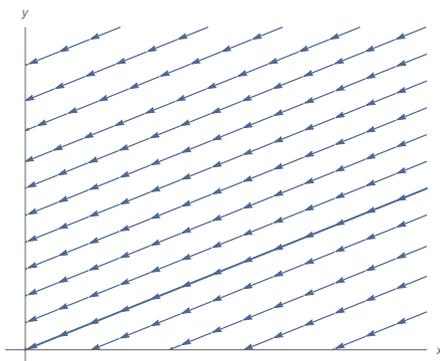


図 6.5 弓矢の戦いの解軌道 ($E = 1/2$)

の極限をとると、以下のような微分方程式系を得る。

$$\frac{dx}{dt} = -\beta y, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha x \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (6.20)$$

先の弓矢の戦いと同様に初期条件を,

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (6.21)$$

とおく。この初期値問題に対する微分方程式系の解を求めることができるが、このためには微分方程式に関するやや専門的な知識が必要なため、ここでは解を直接求めず、二軍間の相互作用のみを検討する*2。

6.2.2 二軍間の相互作用

式(6.20)を変形して,

$$-\frac{1}{\beta y} \frac{dx}{dt} = 1, \quad -\frac{1}{\alpha x} \frac{dy}{dt} = 1 \quad (6.22)$$

より,

$$\frac{1}{\beta y} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{\alpha x} \frac{dy}{dt} = 0, \quad (6.23)$$

両辺に $2\alpha\beta xy$ をかけて

$$\alpha 2x \frac{dx}{dt} - \beta 2y \frac{dy}{dt} = 0 \quad (6.24)$$

を得る。この両辺を t で積分すると

$$\int \alpha 2x \frac{dx}{dt} dt - \int \beta 2y \frac{dy}{dt} dt = 0 \quad (6.25)$$

*2 初期条件を満たす解は次の通り。導出については佐藤(1984, 6-7章)を参照のこと。

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[\left(x_0 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \exp \{ -\sqrt{\alpha\beta} t \} + \left(x_0 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \exp \{ \sqrt{\alpha\beta} t \} \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\left(y_0 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \exp \{ -\sqrt{\alpha\beta} t \} + \left(y_0 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \exp \{ \sqrt{\alpha\beta} t \} \right]$$

より,

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = c \quad (6.26)$$

を得る. ここで c は積分定数である. $t = 0$ のとき, $c = \alpha x_0^2 - \beta y_0^2$ なので, 結局

$$\frac{y_0^2 - y^2}{x_0^2 - x^2} = \frac{\alpha}{\beta} = E \quad (6.27)$$

となる*3. 式 (6.27) より,

$$y^2 = Ex^2 + y_0^2 - Ex_0^2 \quad (6.28)$$

という x と y の関係式を得る.

図 6.6, 6.7, 6.8 の解軌道を見ると, 近代戦においては初期状態でのわずかな戦力差が, 最終的に大きな差となるのが見て取れるだろう.

課題 6.2. 近代戦の戦争のモデルからどのような教訓を引き出すことができるか. 軍参謀になったと仮定して考えてみよう.

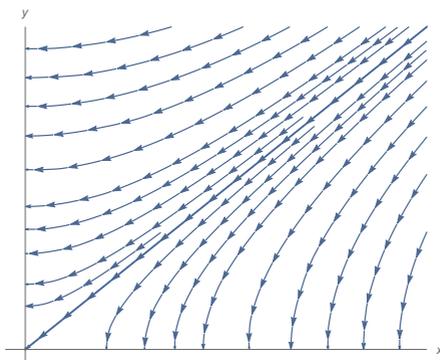
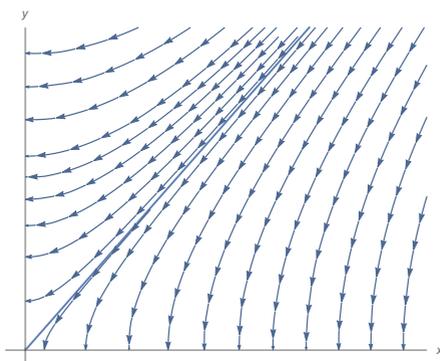
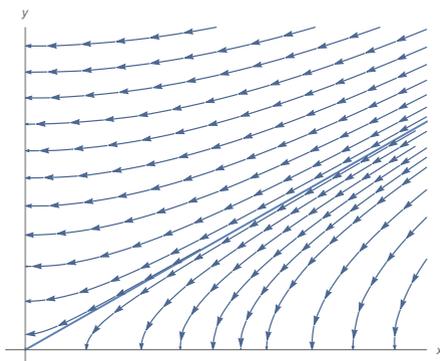
6.3 二国間軍拡競争モデル

次に, L. リチャードソンによる二国間 (あるいは二陣営間) の軍備拡張競争のモデルを紹介する.

6.3.1 微分方程式系の定式化

潜在的に敵対関係にある A 国と B 国を考える. A 国の軍備量を x , B 国の軍備量を y とする. 軍備量はマイナスには成り得ないので, $x, y \geq 0$ である. この二国の軍備量の増減は二国間の相互作用によって規定されると考えられる. そこで, 以下のような 3 つの仮定をおくことにする.

*3 「ランチェスターの二次法則」と言われる.

図 6.6 近代戦の解軌道 ($E = 1$)図 6.7 近代戦の解軌道 ($E = 2$)図 6.8 近代戦の解軌道 ($E = 1/2$)

■仮定1 自国の軍備量の伸びは相手国の軍備量の水準に依存する。相手国の現在の軍備量を見て、その「防衛反応」として軍備の増強を図るという機制を仮定する。これを微分方程式系として表すと

$$\frac{dx}{dt} = ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx \quad (a, b > 0) \quad (6.29)$$

となる。 a, b を「反応係数」と呼ぶ。

■仮定2 自国の軍備量の伸びは自国の軍備量の水準に制約される。自国の軍備費が多くなればなるほど、国家予算の制約からその変化率にブレーキがかかると考える。これを微分方程式系として表すと

$$\frac{dx}{dt} = -mx, \quad \frac{dy}{dt} = -ny \quad (m, n > 0) \quad (6.30)$$

となる。 m, n を「制約係数」と呼ぶ。

■仮定3 自国の軍備量の伸びは相手国に抱いている恒久的な敵対感情・友好感情に依存する。このような感情は、モデルの動く範囲で一定であるとする。これを微分方程式系として表すと

$$\frac{dx}{dt} = g, \quad \frac{dy}{dt} = h \quad (6.31)$$

となる。ただし、 g, h は正もしくは負の定数である。

現実の二国間軍拡競争は、これら3つの要因が複合的に働く結果起こっていると考えることができる。ゆえに、二国間軍拡競争の微分方程式系は

$$\frac{dx}{dt} = ay - mx + g \quad (6.32)$$

$$\frac{dy}{dt} = bx - ny + h \quad (6.33)$$

と表すことができる。ここで、 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ として、この微分方程式系の初期値問題を解くことも可能である。しかしながら、やや専門的な数学的知識が必要なため、以下では系の大まかな挙動を調べる簡易分析を実施して、軍拡競争のタイプとしてどのようなタイプがありうるかを検討する。

6.3.2 定常点

定常点 (stationary point) とは、相平面上において時間がたっても変化しない点 (x^*, y^*) のことである。つまり、初期値が (x^*, y^*) であった場合、両国の軍備量はピタ一文とも増えも減りもしない。定常点を見つけるには、式 (6.32), (6.33) をそれぞれ 0 とおいて、連立方程式

$$ay - mx + g = 0 \quad (6.34)$$

$$bx - ny + h = 0 \quad (6.35)$$

を解けばよい。その結果、

$$x^* = \frac{ng + ah}{mn - ab}, \quad y^* = \frac{bg + mh}{mn - ab} \quad (6.36)$$

を得る。いま、 m, n, a, b はすべて正なので、 x^*, y^* の正負は次のパターンとなる。

- (1) $mn > ab$ かつ $g > 0, h > 0$ のとき、 x^*, y^* は正で、定常点は第1象限。
- (2) $mn > ab$ かつ $g < 0, h < 0$ のとき、 x^*, y^* は負で、定常点は第3象限。
- (3) $mn < ab$ かつ $g > 0, h > 0$ のとき、 x^*, y^* は負で、定常点は第3象限。
- (4) $mn < ab$ かつ $g < 0, h < 0$ のとき、 x^*, y^* は正で、定常点は第1象限。

定常点が現実的に意味を持つのは、第1象限にあるときである。

6.3.3 x, y の増減

式 (6.32) より、

$$\frac{dx}{dt} > 0 \iff y > \frac{m}{a}x - \frac{g}{a} \quad (6.37)$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff y = \frac{m}{a}x - \frac{g}{a} \quad (6.38)$$

$$\frac{dx}{dt} < 0 \iff y < \frac{m}{a}x - \frac{g}{a} \quad (6.39)$$

が成り立つ。このとき、相平面上の直線 $y = (mx + g)/a$ (これを L_1 と表記する) よりも上側の領域では x は増加し、下側の領域では x は減少する (図 6.9)。

一方, 式 (6.33) より,

$$\frac{dy}{dt} > 0 \iff y < \frac{b}{n}x + \frac{h}{n} \quad (6.40)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \iff y = \frac{b}{n}x + \frac{h}{n} \quad (6.41)$$

$$\frac{dy}{dt} < 0 \iff y > \frac{b}{n}x + \frac{h}{n} \quad (6.42)$$

が成り立つ. ゆえに, 相平面上の直線 $y = (bx + h)/n$ (これを L_2 と表記する) よりも上側の領域では y は減少し, 下側の領域では y は増加する (図 6.10).

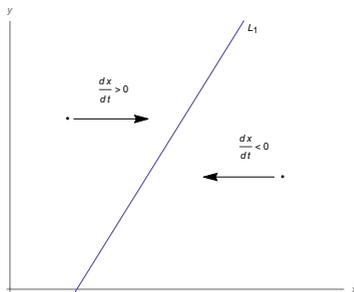


図 6.9 相平面上の x の増減

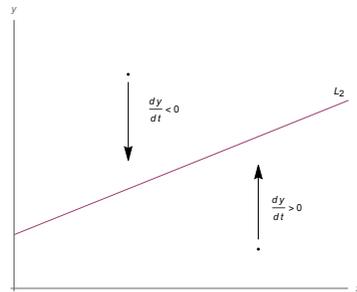


図 6.10 相平面上の y の増減

いま,

$$mn \neq ab \quad (6.43)$$

とすると, 直線 L_1 と L_2 の傾きは異なるのであるから, その場合 2 つの直線はただ 1 点 (x^*, y^*) で交わる. そして, 直線 L_1, L_2 によって相平面は 4 つの領域に切り取られる. このとき, 相平面上の (x, y) の挙動のタイプは, 大きく $mn > ab$ の場合と $mn < ab$ の場合の 2 つに分けられる*4.

■ $mn > ab$ の場合 直線 L_1, L_2 が切り分ける領域ごとに, x 方向の増減と y 方向の増減を組み合わせると, 図 6.11 にあるような (x, y) の挙動を得る.

*4 $mn = ab$ の場合も考えることができるが, ここでは取り上げない. 関心のある向きは, 以下の解析手法で解軌道がどのようになるかを研究してみたい.

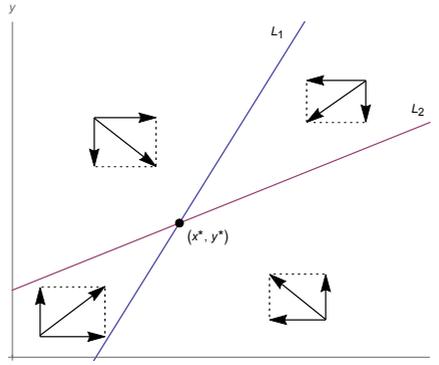
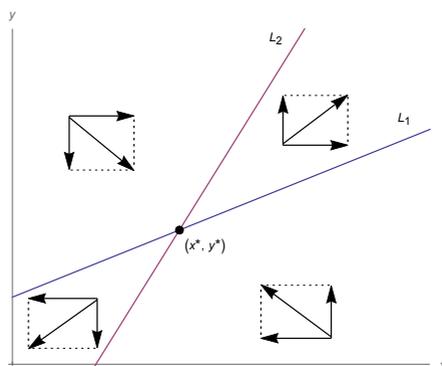


図 6.11 $mn > ab$ の場合の挙動

この場合、どのような初期値から初めても、状態は定常点へと限りなく近づいていくことが見て取れる。逆に言えば、もし状態が定常点にあったときに、何らかのエラーによって状態がわずかながらズレたとしても、結局は定常点へと戻っていく動きがみられる。このような定常点を（漸近）安定定常点 ((asymptotically) stable stationary point) という。

■ $mn < ab$ の場合 先と同様に、直線 L_1, L_2 が切り分ける領域ごとに、 x 方向の増減と y 方向の増減を組み合わせ、図 6.12 の挙動を得る。

この場合、左上・右下の領域では状態は定常点へと限りなく近づいていくが、右上・左下の領域では逆に定常点から離れていく動きをする。この場合、もし状態が定常点にあったときに、何らかの攪乱要因によって状態がわずかながら右上・左下方向にズレると、状態は定常点からどんどん遠ざかっていく。このような定常点を不安定定常点 (unstable stationary point) といい、特にこの場合のように、ある方向では定常点に近づき、別の方向では定常点から遠ざかるような動きをする場合、鞍点 (saddle point) という。

図 6.12 $mn < ab$ の場合の挙動

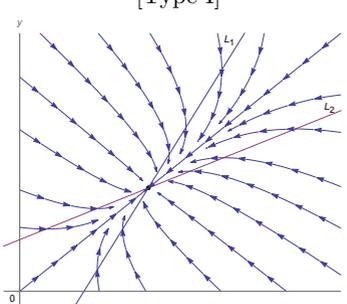
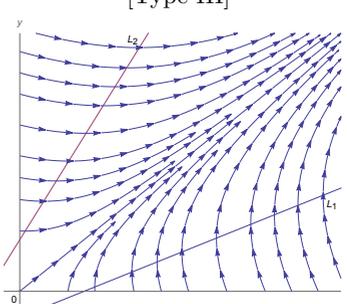
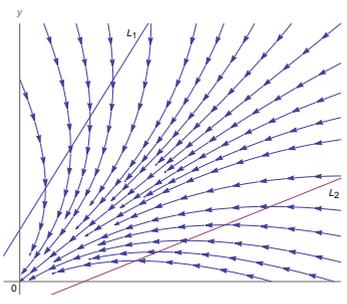
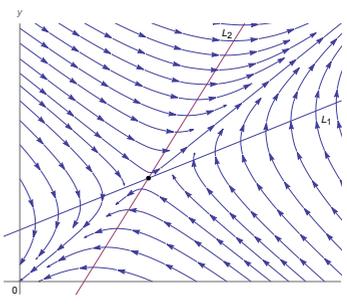
6.3.4 分析のまとめ

mn は両国の制約係数を掛けたものなので、二国間関係における「制約の度合い」を表していると思えることができる。一方、 ab は両国の反応係数を掛けたものであり、二国間関係における「反応の度合い」を表している。この mn と ab の大小関係が解軌道のパターンを決定しており、さらにそれに加えて、 g, h の正負、つまり「敵対」か「友好」かによって、定常点が第 1 象限に入るか、第 3 象限に入るかが決まる。結局、系の挙動としては表 6.1 の 4 パターンに分けることができる。

では、タイプごとに内実を確認しよう。

Type II と Type III は単純で直感的にも了解しやすいだろう。Type II の場合、相手国への反応よりも軍拡を抑えるという制約要因の方が大きく、かつ双方共に潜在的には相手国に友好感情を抱いているので、どのような初期状態であっても、どんどん軍縮の方に向かっていく。今回は軍備量の挙動の話をしているので、状態 (x, y) は第 1 象限内だけを動くが、数学的にはどのような初期状態をとっても第 3 象限内にある定常点へと向かっていく。このとき実際の軍縮過程としては、自国の現在の軍備量によって相手が軍備量を減らし、それを見て自国の軍備量を減らす、という一連のループ過程が存在していると思えることができる。このような過程をネガティブ・フィー

表6.1 軍拡競争の4パターン

	制約 > 反応 $mn > ab$	制約 < 反応 $mn < ab$
敵対 $g > 0$ $h > 0$	[Type I]  力の均衡	[Type III]  全面軍拡
友好 $g < 0$ $h < 0$	[Type II]  全面軍縮	[Type IV]  全面軍縮か全面軍拡

ドバック過程といたりする。

一方、Type III の場合、軍拡を抑えるという制約要因よりも相手国への反応要因の方が大きく、かつ双方共に潜在的には相手国に敵対感情を抱いており、どのような初期状態であっても、どんどん軍拡の方に向かっていく。原理的にはどこまでも双方の軍備量が多くなるが、現実的にはある一定規模の軍備に到達すると戦争が起ると考えてよいだろう。このときの軍拡過程としては、自国の現在の軍備量によって相

手が軍備量を増やし、それを見て自国の軍備量をさらに増やす、という一連のポジティブ・フィードバック過程が存在していると見なすことができる。ここで、取り上げている二国間軍備問題だけではなく、ネガティブ・フィードバック、ポジティブ・フィードバック過程はともに、人間関係システムにおいてしばしば観察される。

Type I, Type IV は第 1 象限内に定常点があるタイプである。Type I は潜在的な敵対感情はあるものの、反応より制約が勝っており、そのためある程度の軍備は備えるものの、ある一定規模に均衡する。この均衡点は、両国のもつ係数の値、つまり国内事情（防衛反応、予算制約、敵対心）に依存して決まる。このタイプの場合、初期状態がどのようなものであっても、一定期間たつと結局は定常状態に戻ってくる。

一方、Type IV は潜在的には友好感情を抱いているものの、制約よりも反応が大きいために、初期状態の双方の軍備量が少なければ全面軍縮へと至るものの、反対に軍備量が多ければ全面軍拡へと至ってしまう。定常点はあるものの、大変危うい均衡であって、ひとたび何らかの攪乱要因—軍備を拡張するという一方の脅しとか、軍部の暴走とか—があって、一方がわずかでも軍備を拡張すると、とどめなき軍拡へと事態は悪化してしまう。反対に、どちらかがわずかでも軍縮をすると、たちまち全面軍縮を達成することができる。

2022 年 2 月ロシアがウクライナに軍事侵攻を開始し、NATO やアメリカに対して核による威嚇を行っていて、世界的な緊張が一気に高まっている。その趨勢はノート執筆時点では明らかではないが、Type III や Type IV のようなとめどない緊張拡大に向かうポジティブ・フィードバックにならないことを祈るばかりである。

課題 6.3. 二国間軍拡競争モデルと同じ構造で表現できる社会現象として、他にどのような現象があるだろうか。また、そのときそれぞれのパターンは具体的にどのような状況に対応するだろうか。仮想例でもよいので自由に考えてみよう。

第7章

感染症と流行のモデル

7.1 Pandemic 2020-202?

2019年11月に中国武漢にて発生し、急性呼吸器疾患 (COVID-19) の原因となる新型コロナウイルス (SARS-CoV-2) は、最初中国武漢を中心に爆発的に感染を拡大させ、さらには世界的大流行 (pandemic) を引き起こすにいたった。疫病は猖獗を極め魍魎魍魎が跋扈し世は大いに乱れた。

ところで、国内での流行拡大初期にさかんに図 7.1 のような流行曲線の模式図が示された*1。対策の要点は、流行の速度を下げることで、新規感染者数の急激な増加を抑え、そのことによって医療対応の限界を超える医療崩壊をできるだけ防ぐということである。その後、ワクチン接種も進んだが、やはり基本的な流行対策は新規感染者の急増を抑えることにある。

また、感染拡大初期において、各種の不確かなあるいは明らかに誤った情報が、SNS を中心に拡散し、人びとの行動に大きな影響を与えた。たとえば、原料不足からトイレットペーパーが不足するかもしれないという情報が人びとの購買行動に影響を与え実際に紙不足が生じた。われわれが工業製品で尻を拭く高度な文明を取り戻したかどうかは授業当日には明らかになっているかもしれない。このような、パンデミックに先行する情報の拡散は、インフォデミック (infodemic) とも呼ばれた*2。

*1 首相官邸新型コロナウイルス感染症対策本部 第12回 (令和2年2月23日開催) 資料 (https://www.kantei.go.jp/jp/singi/novel_coronavirus/th_siryousidai_r020223.pdf)

*2 Novel Coronavirus (2019-nCoV) Situation Report - 13 (2 Feb 2020) by WHO (<https://www.who.int/docs/default-source/coronaviruse/situation-reports/20200202-sitrep-13-ncov-v3.pdf>)

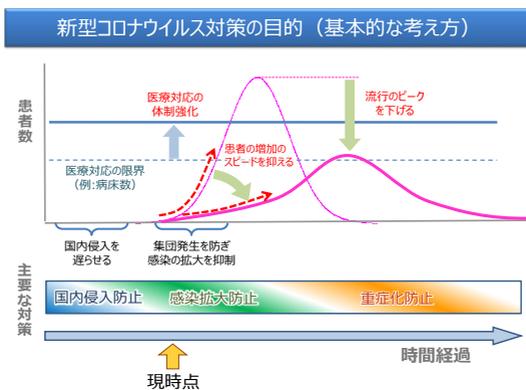


図 7.1 新型コロナウイルス対策の目的

7.2 単純感染モデル

7.2.1 具体例

ウイルスも情報も、基本的に「人づて」に伝わるものだと考えられる。ということは、情報の流行(流言)も感染症の流行も、基本的には同じ原理的なメカニズムを想定できるだろう。このことを、まずもっとも単純なモデルで考えてみよう。

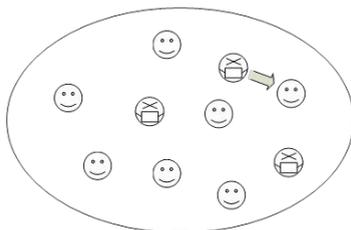


図 7.2 単純感染モデル

いま、ある地域に 10 人の人がいて 3 人がすでに新型コロナウイルスに感染(感染者)し

ており、残りの7人は無事である（非感染者）と想定しよう（図7.2）。10人の人は地域の中を自由気ままに動き回っているとす。このとき、ある1人の感染者が、いろいろな人がある中で非感染者にバッタリと出会う確率を考えよう。自分以外の人中で非感染者は9人中の7人なので、確率は7/9である。より正確には、

$$\frac{\text{全員} - \text{感染者}}{\text{全員} - \text{自分}} = \frac{10 - 3}{10 - 1} = \frac{7}{9} \quad (7.1)$$

である。非感染者に出会ったとき、ウイルスが伝染する確率を、例えば、1/2と仮定してみる。さらに、非感染者に出会うことと、相手に感染させることは独立（互いに関連がない）とする。そうすると、それぞれの感染者が非感染者に出会って、さらに相手にウイルスを移す確率は $(7/9) \times (1/2) = 0.389$ である。いま、地域には3人の感染者がいるので、それぞれの感染者が動き回ったときに、新たに感染する人の予想人数は

$$3 \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{2} = 1.117 \quad (7.2)$$

となる*3。この結果、次の時点で感染者数は累積で4人になっている可能性が高い。

7.2.2 一般化

この単純なモデルを少し一般化してみよう。そこで以下の記号を導入する。

N : 地域の総人口。

t : 時点 ($t = 0, 1, 2, \dots$)。

$x(t)$: t 時点における感染者数、単純に x とだけ書く場合もある。 $x \geq 0$ 。

α : 感染者が非感染者に出会ったとき、相手に感染させる確率。

そして、次のようなモデルの仮定を定める。

- (1) 「新型」のウイルスなので、このウイルスの抗体をもっている人は誰もいない
- (2) それぞれの時点において、感染者・非感染者とも自由に地域を動き回る
- (3) 人々は一度感染すると、その後は α の感染力を持ち続ける（つまり、排ウイルスしない）

*3 確率 p のベルヌーイ試行を n 回行ったときの成功回数は、パラメータ n, p の二項分布 $Bi(n, p)$ にしたがって、その期待値は np である。

このとき、 t 時点において、ある 1 人の感染者が非感染者に出会う確率は

$$\frac{N - x(t)}{N - 1} \quad (7.3)$$

であり、 t 時点において新たに感染する予想人数は、

$$x(t) \times \frac{N - x(t)}{N - 1} \times \alpha = \frac{\alpha}{N - 1} x(t) [N - x(t)] \quad (7.4)$$

である。予想人数は小数になることもあるが、実際に増える人の数は整数でしかありえないので、小数点以下は四捨五入することにしよう。 x の小数点以下を四捨五入することを $\text{nint}(x)$ と書く。そうすると、 t 時点から $t + 1$ 時点にかけて新たに感染する人数 $x(t + 1) - x(t)$ は、

$$x(t + 1) - x(t) = \text{nint} \left(\frac{\alpha}{N - 1} x(t) [N - x(t)] \right) \quad (7.5)$$

となる。そして、 $t + 1$ 時点における累積感染者数は

$$x(t + 1) = x(t) + \text{nint} \left(\frac{\alpha}{N - 1} x(t) [N - x(t)] \right) \quad (7.6)$$

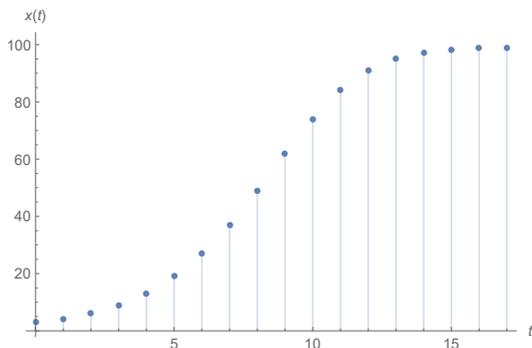
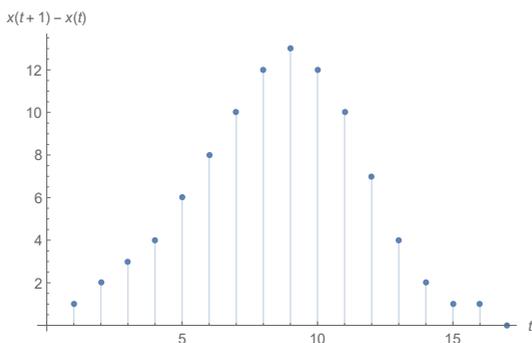
である。

7.2.3 数値例

実際にモデルを動かしてみよう。 $N = 100, \alpha = 0.5, x(0) = 3$ として、 $t = 1$ 以降の新規感染者数と、累積感染者数を計算してみる。Excel や R を使って簡単に計算ができるので暇な人は自分でやってみよう。

モデルを動かしてみた結果、17 時点でほぼ全員に当たる 99 人が感染した (図 7.3)。新規感染者は 9 試行目までどんどん増加し、その後減少に転じた (図 7.4)。最初に見た指針における発生段階のグラフと同じような傾向をしていることが分かるだろう。

ただし、このモデルはもっとも単純なものであり、現実的な予測を与える場合は、さらに仮定を複雑にしたモデルが用いられる。インフルエンザなどの流行性の感染症を考える場合、重要になってくるのが、もともと抗体をもっている人たち、感染後治癒した人たち、隔離中の人たちそして不幸にも死亡した人たちの存在である。治癒した人は感染力がなくなり抗体ができるので、他の人に感染させることもないし自分も

図 7.3 累積感染者数の推移 ($N = 100, \alpha = 0.5, x(0) = 3$)図 7.4 新規感染者数の推移 ($N = 100, \alpha = 0.5, x(0) = 3$)

感染しない。隔離者や死者も同様に、感染させることも感染することもない。こうした人々を「除去者」というが、より複雑な伝染モデルを考えるときは、除去者の数の変化を考慮する必要がある。このモデルはあとの 7.4 節で扱う*4。

今回検討したモデルは、誰も抗体をもっておらず、またモデルの時間が動く範囲内では、感染者は感染力を保持しつつ他者と接触し続けると仮定した。このような仮定は、「新型」で比較的軽い症状の感染症が急速に広まる状況や、感染者がゾンビ化し

*4 さらに、潜伏期間や接触機会、年齢階層を考慮する複雑なモデルもあるが、ここでは扱わない。

もののすごい勢いで襲ってくるような状況*5に適合的であると考えられる。また、不確実性が高い状況下での情報の「感染」現象にも一定程度当てはまる仮定であろう。

7.3 単純感染の微分方程式モデル

7.3.1 微分方程式モデルの定式化

いま N は十分に大きいものと仮定する。先の式 (7.5) を整数化しないで考えよう。式 (7.5) は時間 1 単位あたりの x の増加率を表していると考えられる。すなわち、

$$\frac{x(t+1) - x(t)}{t+1-t} = x(t+1) - x(t) = \frac{\alpha}{N-1}x(t)[N - x(t)] \quad (7.7)$$

ここで増加率を考えると、時間の動く単位 Δt を限りなく小さくすることができる。すると、この式は以下の微分方程式の形になる。すなわち、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \beta x(t)[N - x(t)] \quad (7.8)$$

ただし、 $\beta = \alpha/(N-1)$ であり、 β は感染力の強さを表すパラメータである。

7.3.2 微分方程式を解く【Advanced】

t 時点における感染者数 $x(t)$ の変化は、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(N - x) \quad (7.9)$$

によって近似することができる。以下これを解いていこう*6。これは、「変数分離型」と呼ばれる微分方程式の形式なので、

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(N - x) \iff \frac{1}{x(N - x)} \frac{dx}{dt} = \beta \quad (7.10)$$

*5 2004年リメイクの『ドーン・オブ・ザ・デッド』をもって嚆矢とする全力疾走するモダン・ゾンビ群である。

*6 これ以降は基本的な微分積分の知識を前提としている。

と変形して、両辺を t で積分する. すると,

$$\int \frac{1}{x(N-x)} \frac{dx}{dt} dt = \int \beta dt \quad (7.11)$$

を得る. まず, 式 (7.11) の左辺を変形する.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(N-x)} \frac{dx}{dt} dt &= \int \frac{1}{x(N-x)} dx && \text{置換積分} \\ &= \int \frac{1}{Nx} dx + \int \frac{1}{N(N-x)} dx && \text{部分分数に分解} \\ &= \frac{1}{N} [\log x - \log(N-x)] + C_1 && \text{積分する} \\ &= \frac{1}{N} \log \left(\frac{x}{N-x} \right) + C_1 && \text{対数部分をまとめる} \end{aligned} \quad (7.12)$$

次に, 右辺は

$$\int \beta dt = \beta t + C_2 \quad (7.13)$$

である. ただし, C_1, C_2 はそれぞれ積分定数である. ゆえに,

$$\frac{1}{N} \log \left(\frac{x}{N-x} \right) = \beta t + C \quad (7.14)$$

が成立する. ここで, C は積分定数をまとめたものである. さて, ここで初期状態の仮定として, $t=0$ のとき, $x(0) = x_0$ (定数) と仮定する. すると,

$$C = \frac{1}{N} \log \left(\frac{x_0}{N-x_0} \right) \quad (7.15)$$

となる. これを, 式 (7.14) に代入して, x について解くと,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \log \left(\frac{x}{N-x} \right) &= \frac{1}{N} \log \left(\frac{x_0}{N-x_0} \right) + \beta t && C \text{ を代入} \\ \frac{x}{N-x} &= \frac{x_0 \exp(N\beta t)}{N-x_0} && \text{両辺 } N \text{ をかけたのち } \exp \text{ をとる} \\ x(t) &= \frac{Nx_0 \exp(N\beta t)}{N-x_0 + x_0 \exp(N\beta t)} && x \text{ についてまとめる} \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$x(t) = \frac{Nx_0}{(N-x_0) \exp(-N\beta t) + x_0} \quad \text{別表現} \quad (7.17)$$

となり、 t 時点の累積感染者数の陽関数が求まる。この関数はロジスティック関数 (logistic function) の一つのタイプである。また、 t 時点の新規感染者数の関数 $x'(t)$ も陽関数として求まり、

$$x'(t) = \frac{N^2(N - x_0)\beta x_0 \exp(N\beta t)}{[N - x_0 + x_0 \exp(N\beta t)]^2} \quad (7.18)$$

となる。

7.3.3 累積感染者数と新規感染者数の予測

図 7.5 と図 7.6 は、感染力 β を規定する感染確率 α を変化させたときの、累積感染者数と新規感染者数の推移の予測を表している。

さて、 $x'(t)$ の極大点は、 $x''(t) = 0$ のときの

$$t^* = \frac{\log\left(\frac{N}{x_0} - 1\right)}{N\beta} \quad (7.19)$$

であり、そのときの値は、

$$x'(t^*) = \frac{N^2\beta}{4} \quad (7.20)$$

となる*7。ここから、感染力 β (感染確率 α) が大きければ大きいほど、新規感染者のピークは早まり、ピークにおける瞬間的な新規感染者数は大きくなることがわかる。逆に言えば、感染力を抑えることによって、ピークを遅くしてなおかつピークの値を低くすることができることがわかった。

課題 7.1. このモデルから感染症対策のどのような戦略を引き出すことができるだろうか。具体的に考えてみよう。

7 $x'''(t^) = -(1/8)N^4\beta^3 < 0$ なので、 t^* において $x'(t)$ は極大値をとる。

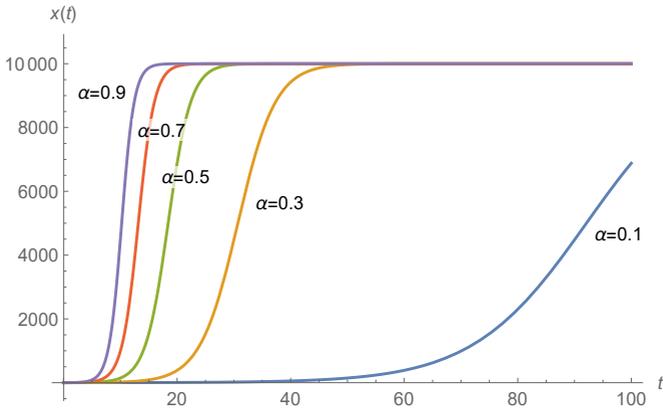


図 7.5 累積感染者数の微分方程式モデルによる予測 ($N = 10000, x_0 = 1$)

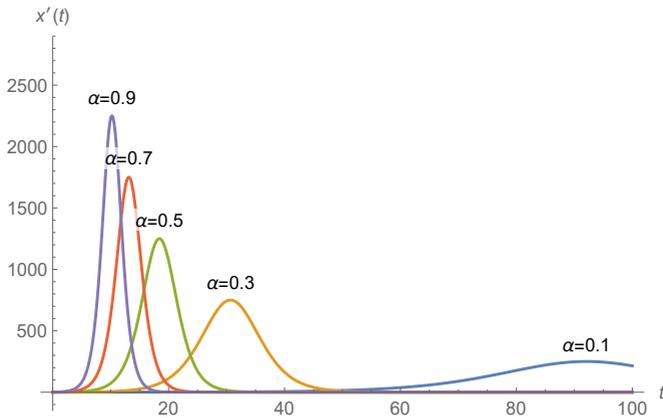


図 7.6 新規感染者数の微分方程式モデルによる予測 ($N = 10000, x_0 = 1$)

7.4 SIR モデル

7.4.1 モデルの仮定

つぎに、除去者を考慮した一般的な感染症のモデルを導入しよう。このモデルは、Kermack and McKendrick (1927) によって提唱され、変数名をとって **SIR** モデ

ルとも呼ばれる。以下の記述では、佐藤 (1987, 7, 8 章), Burghes and Borrie (1981, 7 章), 稲葉 (2002, 6 章) を参照した。

- $S(t)$: 感受性人口 (susceptibles)
 $I(t)$: 感染人口 (infected)
 $R(t)$: 除去人口 (recovered/removed)
 N : 総人口 (定数で $N = S(t) + I(t) + R(t)$)
 β : 感染率 ($\beta > 0$)
 γ : 除去率 ($\gamma > 0$)

SIR モデルは、次のような微分方程式系で表される。

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t) \quad (7.21)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (7.22)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t) \quad (7.23)$$

7.4.2 初期挙動の分析【Advanced】

この系の定常点は、 $-\beta S^*I^* = 0, \beta S^*I^* = \gamma I^*, \gamma I^* = 0$ より、 $(S^*, I^*, R^*) = (S, 0, N - S), S \in [0, N]$ である。

ある地域にとって免疫のない「新型」ウイルスの侵入状況を考えよう。そのときには、地域のすべての人口が感受性人口になっており、そこにごく少数の感染者が発生する。このような侵入のごく初期の状況は、定常点の一つ $(N, 0, 0)$ のまわりで線形

近似した以下の微分方程式系によって表現できる*8.

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta NI(t) \quad (7.26)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = (\beta N - \gamma)I(t) \quad (7.27)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \gamma I(t) \quad (7.28)$$

式 (7.27) は単純な変数分離形なので、 $I(0) = I_0$ としてこれを解くと、

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= (\beta N - \gamma)I(t) && \text{式 (7.27) より} \\ \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} &= (\beta N - \gamma) && \text{両辺に } I^{-1} \text{ をかける} \\ \int_0^t \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} dt &= \int_0^t (\beta N - \gamma) dt && \text{両辺 } 0 \text{ から } t \text{ まで } t \text{ について積分} \\ \log\left(\frac{I}{I_0}\right) &= (\beta N - \gamma)t && \text{積分をとく} \\ \frac{I}{I_0} &= \exp\{(\beta N - \gamma)t\} && \text{両辺の exp をとる} \end{aligned}$$

これより、特殊解

$$I(t) = I_0 \exp\{(\beta N - \gamma)t\} \quad (7.29)$$

を得る。これは、マルサスが『人口論』で展開した人口増加モデルと同型であり、 t にかかると係数はマルサス係数とも呼ばれる。

8 このあたりはテクニカルな話なので、まずは聞き流す程度でよい。以下知りたい人向け。自励系の微分方程式系 $dx/dt = f(x)$ における一つの定常点を \mathbf{x}^ とする。 $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ とするとき、

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{z} \quad (7.24)$$

を \mathbf{x}^* まわりでの線形近似 (linear approximation) という。ただし、 Df は f のヤコビ行列である (例えば、矢嶋 (1989, 190-1) などを参照)。SIR モデルのヤコビ行列は

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad Df(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta N & 0 \\ 0 & \beta N - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

であり、これにより線形近似方程式系を得る。

7.4.3 基本再生算数

マルサス係数 $\beta N - \gamma$ が正の場合、感染者数 I は指数関数的に増加し、負の場合はゼロに向かって減少する。つまり、ある地域に感染症が侵入し流行を始める条件は、

$$\beta N - \gamma > 0 \iff R_0 = \beta N \frac{1}{\gamma} > 1 \quad (7.30)$$

である。ここで、 R_0 は基本再生算数 (basic reproduction number: R nought) と呼ばれ、疫学上大変重要な指数である*9。

R_0 の具体的な意味を確認しよう (稲葉, 2002, 197)。まず、 βN は、「1人の感染者が単位時間あたりに生み出す2次感染者数」を表す*10。次に、 γ^{-1} は、「1人の感染者が除去 (隔離, 免疫獲得, もしくは死亡) されるまでの平均的な感染性期間」を示す*11。これらを掛け合わせた R_0 は、「1人の感染者が感染性期間に生み出す2次感染者数」を示している。まとめると、

$$\underbrace{R_0}_{\text{感染性期間の2次感染者数}} = \underbrace{\beta N}_{\text{単位時間あたりの2次感染者数}} \times \underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{\text{平均的な感染性期間}} \quad (7.31)$$

となる。「1人の感染者が感染性期間に生み出す2次感染者数」である R_0 が1を超えることで指数関数的爆発が起きる (図7.7)。

さらに、流行が起こる条件は

$$R_0 = \beta N \frac{1}{\gamma} > 1 \iff N > \frac{\gamma}{\beta} \quad (7.32)$$

*9 今回のパンデミックを予言したともいわれるスティーブ・ソダーバーグ監督の『コンテイジョン (Contagion)』(2011)では、ケイト・ウィンスレット演じるCDC調査官が地元保健当局者に R_0 の説明をしている。ちなみにこの映画では序盤でいきなりグウィネス・パルトロウが泡を吹いてぶっ倒れて死後検屍のために頭の皮を剥がれるというひどい扱いを受けていて大変よい映画である。

*10 単純感染モデルで N が十分に大きければ $\beta N \approx \alpha$ となる。

*11 このことをもう少し丁寧に説明する。まず、除去は独立に一定の発生確率で起こるイベントであると仮定する (ポアソン過程)。このとき、 γ は、単位時間あたりに発生する除去イベントの平均回数と解釈でき、単位時間当たりの除去発生回数はパラメータ γ のポアソン分布に従う。このとき、次に除去が生じるまでの待ち時間はパラメータ γ の指数分布にしたがい、その期待値は γ^{-1} である。ポアソン過程、ポアソン分布、指数分布については、浜田他 (2019, 5章) も参照。

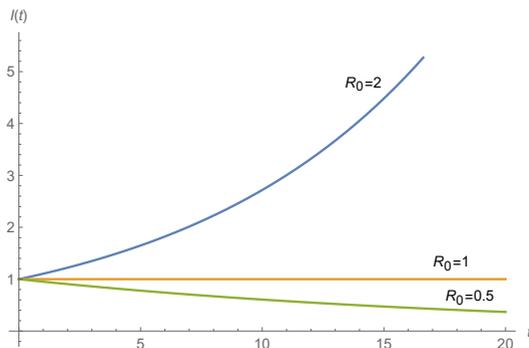


図 7.7 流行初期の近似モデルによる予測 ($\gamma = 0.1$)

とも書き換えられる。ここで、 $\rho = \gamma/\beta$ とすると、 ρ は流行が起こる人口規模の「閾値」であり、閾値が人口規模を下回り、 $N > \rho$ が満たされることによって流行が起こる、とも言うことができる。

課題 7.2. 感染症の爆発的流行を起こさないためにどのような対策が可能だろうか。 R_0 の式の意味から考えてみよう。

7.4.4 (S, I) 相平面【Advanced】

次により一般的な状況について分析を進める。

初期条件として、 $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = 0$ を仮定する。SIR モデルのダイナミクスは (S, I) のみによって動いているので、以下では、

$$\frac{d}{dt}S(t) = -\beta S(t)I(t) \quad (7.33)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (7.34)$$

の 2 つの方程式による系の相平面を検討する。このとき、問題の性質から $S \geq 0, I \geq 0$ となる (S, I) 平面の第 1 象限のみを分析範囲とする。

式 (7.33) より, $dS(t)/dt < 0$. また, 式 (7.34) より,

$$S(t) \leq \rho \implies \frac{d}{dt}I(t) = \beta I(S(t) - \rho) \leq 0 \quad (7.35)$$

ゆえに, 相平面の模式図は図 7.8 のとおりになる.

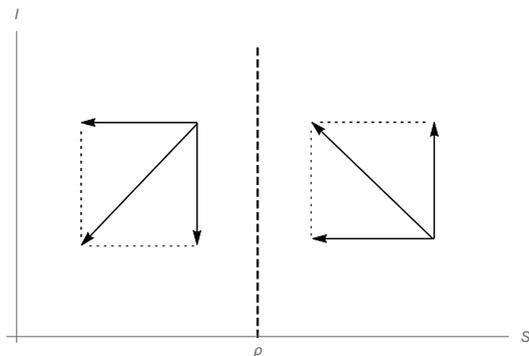


図 7.8 (S, I) 相平面の模式図

より正確に解軌道を描くために S の関数としての I を求める.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} &= \frac{dI}{dt} \frac{dt}{dS} && \text{微分の連鎖律} \\ &= \frac{dI}{dt} \bigg/ \frac{dS}{dt} && \text{逆関数の微分} \\ &= \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} && \text{式 (7.33), (7.34) を代入} \end{aligned}$$

より,

$$\frac{d}{dS}I(S) = -1 + \frac{\rho}{S} \quad (7.36)$$

を得る. この微分方程式を解くと,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} \frac{dS}{dt} &= -\frac{dS}{dt} + \frac{\rho}{S} \frac{dS}{dt} && \text{両辺に } dS/dt \text{ をかける} \\ \int_0^t \frac{dI}{dS} \frac{dS}{dt} dt &= -\int_0^t \frac{dS}{dt} dt + \int_0^t \frac{\rho}{S} \frac{dS}{dt} dt && \text{両辺 } 0 \text{ から } t \text{ まで } t \text{ について積分} \\ \int_{I_0}^I dI &= -\int_{S_0}^S dS + \rho \int_{S_0}^S \frac{dS}{S} && \text{置換積分} \\ I - I_0 &= -S + S_0 + \rho(\log S - \log S_0) && \text{積分する} \end{aligned}$$

より,

$$I(S) = S_0 + I_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0} \quad (7.37)$$

を得る. これにより I が S の関数として表現された.

式 (7.37) より, $I(S_0) = I_0$, $\lim_{S \rightarrow 0} I(S) = -\infty$, また, 式 (7.36) より, $S = \rho$ のとき $dI/dS = 0$, また $d^2I/dS^2 = -\rho/S^2 < 0$ なので, $S = \rho$ のとき $I(S)$ は最大値

$$I(\rho) = S_0 + I_0 - \rho + \rho \log \frac{\rho}{S_0} \quad (7.38)$$

をとる.

初期状態について,

$$R_0 = \frac{S_0}{\rho} = \frac{\beta S_0}{\gamma} > 1 \quad (7.39)$$

のとき, つまり $S_0 > \rho$ のとき, 初期感受性人口が閾値を超えていれば, I は S の減少に伴って上昇し, $S = \rho$ において最大値をとり, その後減少して, 最終的に S 軸と交わる. S 軸と交わる点 $(S^*, 0)$ は系の 1 つの定常点となっている. なぜなら $I = 0$ のとき $dS/dt = 0, dI/dt = 0$ だからである. 逆に, 初期感受性人口が閾値以下 $S_0 < \rho$, つまり $R_0 < 1$ であれば, I は S の減少に伴って単調に減少していく. こども, $R_0 > 1$ が流行発生の閾値条件になっていることが確認できる.

また, $S_0 > \rho$ のとき, $I(S)$ の最大値 $I(\rho)$ を ρ で微分すると, $dI(\rho)/d\rho = \log(\rho/S_0) < 0$. つまり, ρ が大きいほど, ピーク時の感染者数は少なくなる. $\rho = \gamma/\beta$ を思い出すと, 除去率を増やす, あるいは感染率を減らす, あるいはその両方によって, ピーク時の感染者数を小さくすることができることがわかる.

図 7.9 は、 $\beta = 0.00002, \gamma = 0.1$, よって $\rho = 5000$ としたときの系のベクトル場を示しており、赤のグラフは初期値 $S_0 = 8000, I_0 = 10$ を設定したときの解軌道である。また、図 7.10 は、同条件における $S(t), I(t), R(t)$ の特殊解をプロットしたものである。

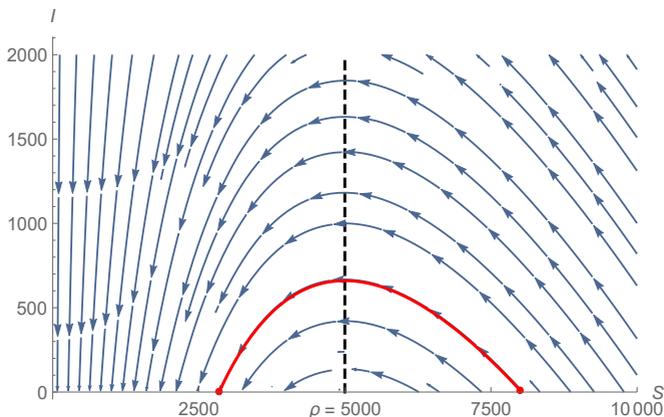


図 7.9 ベクトル場 ($\beta = 0.00002, \gamma = 0.1$) と解軌道 ($S_0 = 8000, I_0 = 10$) の例

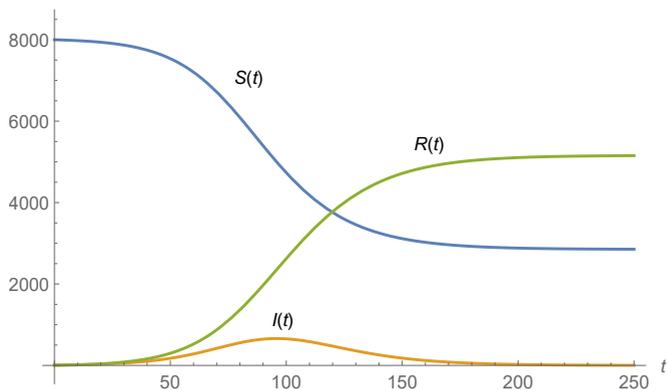


図 7.10 特殊解のプロット ($\beta = 0.00002, \gamma = 0.1, S_0 = 8000, I_0 = 10$)

7.4.5 閾値定理【Advanced】

式 (7.37) より,

$$S = S_0 + I_0 - I + \rho \log \frac{S}{S_0} \quad (7.40)$$

を得る. ここから, $t \rightarrow \infty$ としたときの, 最終的な感受性人口 $S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ についての式を求める. $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned} S_\infty &= S_0 + I_0 + \rho \log \frac{S_\infty}{S_0} && \text{limit をとる} \\ \exp\{S_\infty\} &= \exp\{S_0 + I_0\} \left(\frac{S_\infty}{S_0}\right)^\rho && \text{両辺 exp をとる} \\ \exp\left\{\frac{S_\infty}{\rho}\right\} &= \exp\left\{\frac{S_0 + I_0}{\rho}\right\} \left(\frac{S_\infty}{S_0}\right) && \text{両辺 } \rho^{-1} \text{ 乗} \\ S_\infty &= S_0 \exp\left\{-\frac{S_0 + I_0 - S_\infty}{\rho}\right\} && \text{まとめる} \end{aligned} \quad (7.41)$$

ここで, t 時点において, 感染する感受性人口の割合を示す関数として,

$$p(t) = \frac{S(0) - S(t)}{S(0)} = 1 - \frac{S(t)}{S(0)} \quad (7.42)$$

を導入する.

$$p_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \quad (7.43)$$

とすると, p_∞ は最終的な流行の強度を表す. これにより式 (7.41) を

$$1 - p_\infty = \exp\{-R_0 p_\infty - \zeta\} \quad (7.44)$$

と書き換えられる. ここで $R_0 = \beta S_0 / \gamma$ は初期時刻における基本再生産数であり, $\zeta = \beta I_0 / \gamma$ は初期の感染人口から発生する 2 次感染者数である^{*12}. この式から, 初期条件に依存する流行強度を求めることができる.

次に, 「閾値定理」として知られる定理を証明する.

^{*12} 総感染力 (total infectivity) と呼ばれる (稲葉, 2002, 202).

命題 7.1. $S_0 > \rho$ であり, かつ $\nu = S_0 - \rho$ が S_0 に比べて十分小さく, かつ I_0 が S_0 に比べて十分小さいとすると, 初期の感受性人口から感染する人口は 2ν に近似し, 最終的に残る感受性人口は $\rho - \nu$ に近似する. つまり,

$$S_0 - S_\infty \approx 2\nu. \quad (7.45)$$

証明. 条件より, $S_0 + I_0 \approx S_0$ とすると, 式 (7.44) は,

$$1 - p_\infty = \exp \left\{ -\frac{S_0}{\rho} p_\infty \right\} \quad (7.46)$$

となる. 指数関数のテイラー展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} x^n$ より,

$$\exp \left\{ -\frac{S_0}{\rho} p_\infty \right\} \approx 1 - \frac{S_0}{\rho} p_\infty + \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{\rho} p_\infty \right)^2 \quad (7.47)$$

を用いて整理すると,

$$p_\infty \left(1 - \frac{S_0}{\rho} + \frac{S_0^2}{2\rho^2} p_\infty \right) = 0 \quad (7.48)$$

となる. モデルの仮定より $S(t)$ は狭義単調減少関数であり $p_\infty > 0$ なので, 括弧の中について解くと,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{S_0}{\rho} + \frac{S_0^2}{2\rho^2} p_\infty &= 0 \\ \left(\frac{S_0}{2\rho^2} \right) S_0 p_\infty &= \frac{S_0}{\rho} - 1 \\ S_0 p_\infty &= 2 \frac{\rho^2}{S_0} \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) \\ S_0 p_\infty &= 2 \frac{\rho}{S_0} (S_0 - \rho) \\ S_0 - S_\infty &= 2 \frac{S_0 + \nu}{S_0} \nu \\ S_0 - S_\infty &\approx 2\nu \qquad S_0 + \nu \approx S_0 \text{ より} \end{aligned}$$

を得る. □

$S_0 - S_\infty \approx 2(S_0 - \gamma/\beta)$ より, 除去率を増やす, あるいは感染率を減らす, あるいはその両方によって, 流行における累積感染者数を小さくすることができるがわかる.

図 7.11 は閾値定理による近似の具体例である. $\nu = S_0 - \rho = 12000 - 10000 = 2000$ であり, 最終的には $S_\infty \approx S_0 - 2\nu = 8000$ になると予測される. 実際には, $S_\infty = 8189.67$ である.

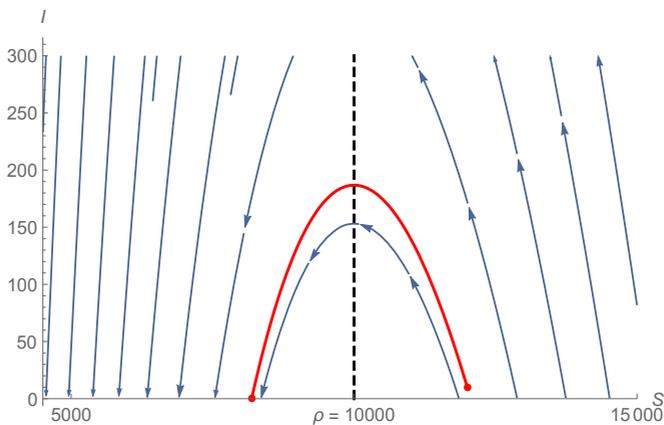


図 7.11 閾値定理の例 ($\beta = 0.00001, \gamma = 0.1, S_0 = 12000, I_0 = 10$)

7.4.6 流行曲線【Advanced】

次に, 除去者人口 $R(t)$ の推移を研究する. 引き続き, 初期条件として $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = 0$ を仮定する.

まず, S を R の関数として解く. モデルの仮定より,

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \iff I = \frac{1}{\gamma} \frac{dR}{dt}. \quad (7.49)$$

これを, $dS/dt = -\beta SI$ に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{\gamma} S \frac{dR}{dt} && I \text{ を代入} \\ \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{\rho} S \frac{dR}{dt} \\ \int_0^t \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \int_0^t \frac{dR}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \frac{S}{S_0} &= -\frac{1}{\rho}(R - R(0)) \\ S &= S_0 \exp \left\{ -\frac{R}{\rho} \right\}\end{aligned}$$

を得る. 仮定より $N = S + I + R \iff I = N - S - R$ であるので,

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \gamma I \\ &= \gamma(N - S - R) \\ &= \gamma \left(N - S_0 \exp \left\{ -\frac{R}{\rho} \right\} - R \right)\end{aligned}\tag{7.50}$$

これが, SIR モデルにおける流行曲線 (epidemic curve) である.

R/ρ が十分に小さいと仮定したときの, $dR/dt, R(0) = 0$ の近似解は

$$R(t) = \frac{\rho^2}{S_0} \left[\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right) + \lambda \tanh \left(\frac{\gamma\lambda}{2} t - \mu \right) \right]\tag{7.51}$$

となる. ただし,

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0(N - S_0)}{\rho^2}}\tag{7.52}$$

$$\mu = \tanh^{-1} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{S_0}{\rho} - 1 \right)\tag{7.53}$$

である. 近似解 R を t について微分すると, 新規除去者数の推移の近似として

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\gamma\rho^2\lambda^2}{2S_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\gamma\lambda}{2} t - \mu \right)\tag{7.54}$$

を得る. 詳しい導出は佐藤 (1987, 8 章) を参照のこと. 図 7.12, 7.13 は $R(t)$ と dR/dt の近似の例である.

7.5 感染のエージェント・ベースド・モデル

仮想社会上の行動主体 (エージェント) に単純なルールを与えて動かし, そのマクロな帰結をシミュレートする手法であるエージェント・ベースド・モデル (agent based model, ABM) を用いた研究が近年盛んである. フリーの ABM プログラミング環境の一つとして, NetLogo がある. 近年では, web 利用可能な NetLogo Web

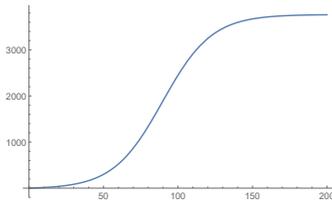


図 7.12 $R(t)$ の近似 ($\beta = 0.00002, \gamma = 0.1, S_0 = 8000, N = 8010$)

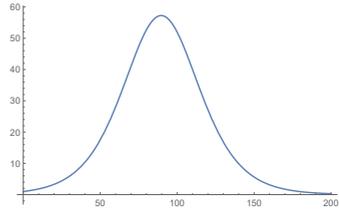


図 7.13 dR/dt の近似 (条件は図 7.12 と同じ)

(<http://www.netlogoweb.org/>) も公開されており、簡単に ABM を触ってみることができる。

NetLogo Web にはいくつかのサンプルが公開されており、感染症関連のモデルもいくつか含まれる。たとえば、「Virus」は基本設定が SIR モデルのシミュレーションである*¹³。いろいろ触って遊んでみよう。

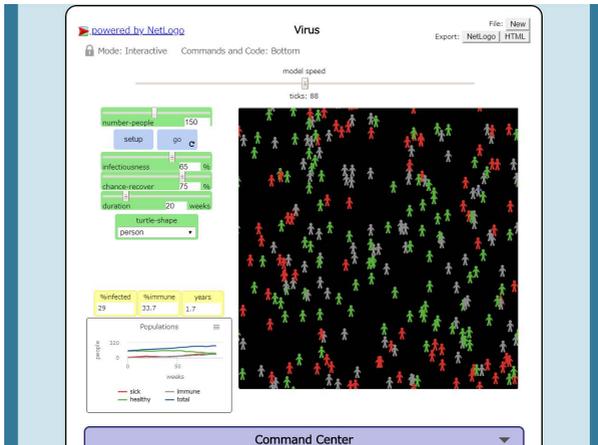


図 7.14 NetLogo Web の virus サンプル画面

*¹³ ただし、寿命による人口の入れ替わりを仮定しており、流行に周期性が見られる。

課題 7.3. *NetLogo* の *Virus* モデルを実際に動かしてみよう。画面をキャプチャ (*Windows* の場合 *Alt+Print Screen*) した上で、どのような条件設定の元でどのような結果になったかを報告しよう。

付録 A

A.1 課題の解答 (一部)

■課題 5.2

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

- (1) 父の兄弟の子ども : $C^{-1}C = I$
- (2) 母の姉妹の子ども : $C^{-1}WW^{-1}C = I$
- (3) 父の姉妹の子ども : $C^{-1}W^{-1}C = W$
- (4) 母の兄弟の子ども : $C^{-1}WC = W$

■課題 5.4

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

このとき,

$$W^2 = C^4 = I \quad (\text{A.3})$$

が成立する. この規定婚システムにおける親族関係のタイプは

$$\{I (= W^2 = C^4), W (= C^2), C, C^3 (= WC = CW)\} \quad (\text{A.4})$$

の 4 種類である.

表 A.1 課題 5.4 の演算表

	I	W	C	C^3
I	I	W	C	C^3
W	W	I	C^3	C
C	C	C^3	W	I
C^3	C^3	C	I	W

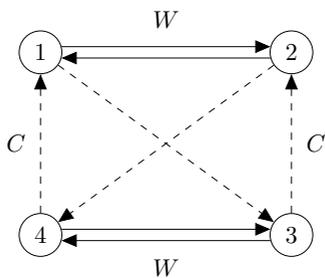


図 A.1 課題 5.4 の規定婚システム

$$W^2 = I \quad \text{かつ} \quad WC = CW \quad (\text{A.5})$$

が成立するので、この社会は「I 双系婚」である。

参考文献

- Axelrod, Robert (1984) *The Evolution of Cooperation*, New York: Basic Books, (松田裕之訳, 『つきあい方の科学』, ミネルヴァ書房, 1998年) .
- Boudon, Raymond (1982) *The Unintended Consequences of Social Action*, London, UK: The Macmillan Press.
- Bradley, Ian and Ronald L. Meek (1986) *Matrices and Society: Matrix Algebra and its Application in Social Sciences*, Princeton: Princeton University Press, (小林淳一・三隅一人訳, 『社会のなかの数理 [新装版]—行列とベクトル入門』, 九州大学出版会, 2014年) .
- Brockmann, Hilke, Jan Delhey, Christian Welzel, and Hao Yuan (2008) “The China Puzzle: Falling Happiness in a Rising Economy,” *Journal of Happiness Studies*, Vol. 10, No. 4, pp. 387–405, April, DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10902-008-9095-4>.
- Burghes, David N. and Morag S. Borrie (1981) *Modelling with Differential Equations*, New York: E. Horwood, (垣田高夫・大町比佐栄訳, 『微分方程式で数学モデルを作ろう』, 日本評論社, 1990年) .
- Coleman, James S. (1990) *Foundations of Social Theory*, Cambridge: Harvard University Press, (久慈利武監訳, 『社会理論の基礎 (上)』, 青木書店, 2004年) .
- Davis, Allison, Burleigh B. Gardner, and Mary R. Gardner (1941=1988) *Deep South: A Social Anthropological Study of Caste and Class*, Los Angeles: University of California Center for Afro.
- 土場学ほか(編) (2004) 『社会を〈モデル〉でみる—数理社会学への招待』, 勁草書房.

- Durkheim, Émile (1897) *Le Suicide: Étude de Sociologie*, Paris, France: Félix Alcan, (宮島喬訳, 『自殺論』, 中央公論新社, 1985年) .
- Fararo, Thomas J. (1973) *Mathematical Sociology: An Introduction to Fundamentals*, New York: John Wiley & Sons, (西田春彦・安田三郎監訳, 『数理社会学 I・II』, 紀伊國屋書店, 1980年) .
- Fararo, Thomas J. and Kenji Kosaka (2003) *Generating Images of Stratification: A Formal Theory*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Gibbons, Robert (1992) *Game Theory for Applied Economists*, Princeton: Princeton University Press, (福岡正夫・須田伸一訳, 『経済学のためのゲーム理論入門』, 岩波書店, 2000年) .
- Graham, Carol (2009) *Happiness Around the World: The Paradox of Happy Peasants and Miserable Millionaires*, Oxford, UK: Oxford University Press.
- Hamada, Hiroshi (2012) “A Model of Class Identification: Generalization of Fararo–Kosaka Model with Lyapounov’s Central Limit Theorem,” 『関西学院大学社会学部紀要』, 第114巻, 23–35頁.
- 浜田宏 (2007) 『格差のメカニズム—数理社会学的アプローチ』, 勁草書房.
- (2018) 『その問題、数理モデルが解決します』, ベレ出版.
- (2020) 『その問題、やっぱり数理モデルが解決します』, ベレ出版.
- 浜田宏・石田淳・清水裕士 (2019) 『社会科学のためのベイズ統計モデリング』, 朝倉書店.
- Hey, John D. and Peter J. Lambert (1980) “Relative Deprivation and the Gini Coefficient: Comment,” *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 95, No. 3, pp. 567–573.
- 稲葉寿 (2002) 『数理人口学』, 東京大学出版会.
- Ishida, Atsushi (2012a) “A Detailed Derivation of the Distribution of Class Identification in a ‘Chance Society’: A Note on the Fararo–Kosaka Model,” 『関西学院大学社会学部紀要』, 第114巻, 257–65頁.
- (2012b) “An Evolutionary Game Analysis of the Boudon–Kosaka Model of Relative Deprivation,” 『関西学院大学社会学部紀要』, 第114巻, 155–70頁.
- 石田淳 (2003) 「認識の効率性と階層イメージ—スキャニング打ち切り条件を課し

- た FK モデル」, 『理論と方法』, 第 18 卷, 第 2 号, 211–28 頁.
- (2015) 『相対的剥奪の社会学——不平等と意識のパラドックス』, 東京大学出版会.
- 石原英樹・金井雅之 (2002) 『進化的意志決定』, 朝倉書店.
- 神取道宏 (2015) 『人はなぜ協調するのか——くり返しゲーム理論入門』, 三菱経済研究所.
- Kermack, William Ogilvy and A. G. McKendrick (1927) “A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, Vol. 115, No. 772, pp. 700-721, DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>.
- 小林淳一・木村邦博 (編) (1991) 『考える社会学』, ミネルヴァ書房.
- Kosaka, Kenji (1986) “A Model of Relative Deprivation,” *Journal of Mathematical Sociology*, Vol. 12, No. 1, pp. 35–48.
- Kosaka, Kenji and Thomas J. Fararo (1991) “Self-location in a Class System: A Formal-Theoretical Analysis,” in Lawler, Edward J., Barry Markovsky, Cecilia Ridgeway, and Henry A. Walker eds. *Advances in Group Processes Volume 8*, Greenwich: JAI Press, pp. 29–66.
- 高坂健次 (1978) 「社会のモデル」, 確井たかし・杉本一郎 (編) 『現代社会と社会学的分析』, アカデミア出版会, 89–112 頁.
- (2006) 『社会学におけるフォーマル・セオリー——階層イメージに関する FK モデル【改訂版】』, ハーベスト社.
- 高坂健次・与謝野有紀 (1998) 「社会学における方法」, 高坂健次・厚東洋輔 (編) 『講座社会学 1 理論と方法』, 東京大学出版会, 199–238 頁.
- Lave, Charles A. and James G. March (1975) *An Introduction to Models in the Social Sciences*, New York: Harper and Row, (佐藤嘉倫・大澤定順・都築一治訳, 『社会科学のためのモデル入門』, ハーベスト社, 1991 年) .
- Lévi-Strauss, Claude (1958) *Anthropologie structurale*, Paris: Plon, (生松敬三他訳, 『構造人類学』, みすず書房, 1972 年) .
- (1967) *Les structures élémentaires de la Parenté, 2nd ed.*, Paris: Mouton, (福井和美訳, 『親族の基本構造』, 青弓社, 2000 年) .

- Merton, Robert K. (1957) *Social Theory and Social Structure: Toward the Codification of Theory and Research, 2nd edition*, Gelncoc, IL: The Free Press, (森東吾・森好夫・金沢実・中島竜太郎訳, 『社会理論と社会構造』, みすず書房, 1961年) .
- 武藤正義 (2009) 「書評部会 浜田宏著『格差のメカニズム』——ゲーム理論との関係」, 第48回数理社会学会大会 (於: 北星学園大学) 報告資料.
- 岡田章 (2011) 『ゲーム理論 [新版]』, 有斐閣.
- Page, Scott E. (2018) *The Model Thinker*, New York: Basic Books, (椿広計 (監訳)・長尾高弘訳, 『多モデル思考—データを知恵に変える24の数理モデル』, 森北出版, 2020年) .
- Poundstone, William (1992) *Prisoner's Dilemma*, New York: Doubleday, (松浦俊輔他訳, 『囚人のジレンマ——フォン・ノイマンとゲームの理論』, 青土社, 1995年) .
- Rapoport, Anatol and Albert M. Chammah (1965) *Prisoner's Dilemma: A Study in Conflict and Cooperation*, Ann Arbor: The University of Michigan Press, (廣松毅・平山朝治・田中辰雄訳, 『囚人のジレンマ——紛争と協力に関する心理学的研究』, 啓明社, 1983年) .
- Richardson, Lewis F. (1960) *Arms and Insecurity: A Mathematical Study of the Causes and Origins of War*, Pittsburgh: Boxwood Press.
- Runciman, W. G. (1966) *Relative Deprivation and Social Justice: A Study of Attitudes to Social Inequality in Twentieth-century England*, London, UK: Routledge & Kegan Paul.
- 佐々木宏夫 (2003) 『入門 ゲーム理論』, 日本評論社.
- 佐藤總夫 (1984) 『自然の数理と社会の数理—微分方程式で解析する I』, 日本評論社.
- (1987) 『自然の数理と社会の数理—微分方程式で解析する II』, 日本評論社.
- 盛山和夫 (編) (2015) 『社会を数理で読み解く——不平等とジレンマの構造』, 有斐閣.
- Stouffer, Samuel A., Edward A. Suchman, Leland C. DeVinney, Shirley A. Star, and Robin M. Williams Jr. (1949) *The American Soldier: Adjustment During*

- Army Life*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Tocqueville, Alexis de (1840) *De la démocratie en Amérique, t. 2*, Paris, France: Michel Lévy, (松本礼二訳, 『アメリカのデモクラシー 第2巻(上・下)』, 岩波書店, 2008年) .
- (1856) *L'Ancien Régime et la R'évolution*, Paris, France: Michel Lévy, (小山勉訳, 『旧体制と大革命』, 筑摩書房, 1998年) .
- White, Harrison C. (1963) *An Anatomy of Kinship: Mathematical Models for Structures of Cumulated Roles*, New Jersey: Prentice-Hall.
- 矢嶋信男 (1989) 『常微分方程式』, 岩波書店.
- 山下正男 (2006) 『思想の中の数学的構造』, ちくま学芸文庫.
- Yitzhaki, Shlomo (1979) "Relative Deprivation and the Gini Coefficient," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 93, No. 2, pp. 321–324.
- 与謝野有紀 (1996) 「階層評価の多様化と階層意識」, 『理論と方法』, 第11巻, 第1号, 21–36頁.
- 結城浩 (2007) 『数学ガール』, ソフトバンククリエイティブ.